Formelsammlung Mathematik für Klausuren

Nur für den Gebrauch zur Vorlesung in Wirtschaftsmathematik und
für die Klausuren bestimmt

© Jürgen Meisel (2007)
http://www.juergenmeisel.de e-Mail: info@juergenmeisel.de

Inhaltsübersicht:

Thema	Seite
(1) Summenzeichen / Potenzsummen	**2**
(2) Fakultät	**3**
(3) Binomialkoeffizient; Binomischer Lehrsatz	**4**
(4) Gesetze und Rechenregeln zu Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	**5**
(5) Quadratische Gleichungen	**6**
(6) Lineare Funktionen	**6**
(7) Differentiation bei Funktionen mit einer Variablen / Ableitungen	**7**
(8) Ökonomische Grundbegriffe	**9**
(8) Kurvendiskussion	**10**
(9) Grenzwertregeln nach L'Hospital	**11**
(10) Newton-Iteration	**13**
(11) Integralrechnung (inkl. Konsumenten- und Produzentenrente)	**14**
(12) Differentiation bei Funktionen mit mehreren Variablen / partielle Ableitungen	**16**
(13) Extremwerte ohne / mit Nebenbedingungen	**17**
(14) Totales Differential	**20**
(15) Matrizen und Determinanten	**21**
(16) Ökonom. Anwendungen: Materialverflechtung & Leontief-Modell	**24**
(17) Lineare Gleichungssysteme / Cramer-Regel / Gauß-Verfahren	**26**
(18) Lineare Optimierung / Simplexalgorithmus	**28**
(19) Finanzmathematik / Kapitalwertmethode / Interner Zinsfuß	**29**

Formelsammlung für Klausuren

Summenzeichen

Summenzeichen sind abkürzende Operationszeichen für algebraische Summen.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \quad = \quad a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n \quad mit \;\; n \geq m \quad und \;\; m, n \in Z$$

Rechenregeln:

1.) Abspalten von Teilsummen: $\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=m}^{n} a_i \right) + a_{n+1}$

2.) Sonderfall 1: m = n (Untergrenze = Obergrenze) $\sum_{i=m}^{m} a_i = a_m$

3.) Sonderfall 2: m > n (Untergrenze > Obergrenze) $\sum_{i=1}^{0} a_i \overset{Def.}{=} 0$

4.) Zerlegung in Teilsummen: $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

5.) Multiplikation mit einer Konstanten: $\sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$

6.) Addition einer Konstanten: $\sum_{i=m}^{n} c = (n - m + 1) \cdot c$

Doppelsumme:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \quad = \quad & a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{1,m} \\ & + a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + \ldots + a_{2,m} \\ & + \ldots \\ & \ldots \\ & + \ldots \\ & + a_{n,1} + a_{n,2} + a_{n,3} + \ldots + a_{n,m} \end{aligned}$$

$mit \;\; n \geq i \; und \; m \geq k \quad und \;\; n, m, i, k \in Z$

$$Indexverschiebung: \quad \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+c}^{n+c} a_{i-c} = \sum_{i=m-c}^{n-c} a_{i+c}$$

Potenzsummen

1.) Summe der ersten n Zahlen:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

2.) Summe der ersten n Quadratzahlen:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+...+n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

3.) Summe der ersten n^3 Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+...+n^3$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

Fakultät

Für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen wird abkürzend **n!** geschrieben und n-Fakultät gesprochen:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n \quad mit\ n \in N$$

$$Sonderfall: \quad 0! \overset{Def.}{=} 1$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$$

$$mit\ n \geq k \geq 0 \quad und \quad n,k \in N$$

Rechengesetze:

$$1.)\quad Symmetrie \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$2.)\quad Symmetrie \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$3.)\quad Symmetrie \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$4.)\quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$5.)\quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$$

Binomische Formeln:

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad und \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Gesetze und Rechenregeln zu Potenzen:

Voraussetzung: $a, b, m, n \in \Re$

1.) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

2.) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad mit\ b \neq 0$

3.) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

4.) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad mit\ a \neq 0$

5.) $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$

6.) $a^0 \overset{Def.}{=} 1 \quad mit\ a \neq 0$

7.) $a^{-n} = a^{0-n} = a^0 \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad mit\ a \neq 0$

Gesetze und Rechenregeln zu Wurzeln:

Voraussetzung: $a, b, m, n \in \Re \quad und \quad a \geq 0 \quad und \quad n \neq 0$

1.) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

2.) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

sonst: vgl. Gesetze und Rechenregeln zu Potenzen

Sonderfall: Der Ausdruck ist berechenbar, es gelten dann aber kein Potenzgesetze!

$$\sqrt[n]{(-a)} = (-a)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{Beispiel} \sqrt[3]{(-8)} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-2)$$

Gesetze und Rechenregeln zu Logarithmen:

Voraussetzung: $a, b \in \Re \quad und \quad a, b \geq 0$

1.) $\log_t(a) = \frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(t)} = n \Leftrightarrow a = t^n \quad mit\ t > 0\ und\ t \neq 1$

2.) $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

3.) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

4.) $\log(a)^n = n \cdot \log(a)$

Gebräuchliche Logarithmensysteme:

Basis 2:	$\log_2(a) = \mathrm{lb}(a)$		binärer Logarithmus
Basis 10:	$\log_{10}(a) = \lg(a)$		dekadischer Logarithmus
Basis e:	$\log_e(a) = \ln(a)$		natürlicher Logarithmus

Quadratische Gleichungen

Lösungsformel für Quadratische Gleichungen

(1) $x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

(2) $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Lineare Funktionen / Geraden

Normalform: $f(x) = mx + b$ mit m = Steigung; b = y-Achsenabschnitt

Punkt-Richtungsform: $y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \quad oder \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

Zwei-Punkteform: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Schnittwinkel zwischen Geraden: $\tan(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \quad mit \quad m_1 \cdot m_2 \neq (-1)$

Bedingung für zueinander senkrechte Geraden: $m_1 \cdot m_2 = (-1) \quad oder$

$m_{Tangente} \cdot m_{Normale} = (-1)$

Differenzierbarkeit und Ableitungsregeln für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

Die Funktion $f(x): D \to \Re$ heißt an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(x_0)$, wenn gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$

=> $\boxed{\text{Steigung der Tangente in } x_0\text{:} \quad f'(x_0) = m = \tan(\alpha)}$

Ableitungsregeln:

(1) Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$

(2) Summenregel:

$$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

(3) Produktregel:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

(4) Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{\left[h(x)\right]^2}$$

(5) Kettenregel:

$$f(x) = h(g(x)) \Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

(6) Logarithmische Ableitung:

(i) $\boxed{f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln(a)}$

Erläuterung:

$$f(x) = a^x \overset{\text{weil gilt: } e^{\ln(t)} = t}{=} e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln(a)}$$

$$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{Ableitung}} f'(x) = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) \overset{e^{x \cdot \ln(a)} = a^x}{=} a^x \cdot \ln(a)$$

(ii) $\boxed{f(x) = x^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = x^x \cdot \left[\ln(x)+1\right]}$

Erläuterung:

$$f(x) = x^x \overset{\text{weil gilt: } e^{\ln(t)}=t}{=} e^{\ln\left(x^x\right)} = e^{x\cdot\ln(x)} \xrightarrow[\text{Kettenregel \& Produktregel}]{\textit{Ableitung}}$$

$$f'(x) = e^{x\cdot\ln(x)} \cdot \left[\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right] \overset{e^{x\cdot\ln(x)}=x^x}{=} x^x \cdot \left[\ln(x)+1\right]$$

Übersichtstabelle: Ableitung – Funktion - Stammfunktion

Ableitung	**Funktion**	**eine Stammfunktion**
$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	a	$a \cdot x$
$n \cdot x^{n-1}$	x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$ $\quad mit\ n \neq (-1)$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\lvert x \rvert$
$\frac{f''(x) \cdot f(x) - \left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x) \rvert$
$a \cdot e^{a\cdot x+b}$	$e^{a\cdot x+b}$	$a^{-1} \cdot e^{a\cdot x+b}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$
$\frac{1}{x}$	$\ln(a\cdot x) = \ln(a) + \ln(x)$	$x \cdot \ln(a \cdot x) - x$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$-\ln\lvert \cos(x) \rvert$

Ökonomische Grundbegriffe:

Betriebsoptimum (BO):
Das BO ist die Ausbringungsmenge, bei deren Produktion die geringsten Durchschnittskosten $\left[= \frac{k(x)}{x}\right]$ entstehen.

Langfristige Preisuntergrenze (LPU):
Die LPU ist hier der Preis, der den minimalen Durchschnittskosten $\left[= \frac{k(x)}{x}\right]$ *entspricht.*

Betriebsminimum (BM):
Das BM ist die Ausbringungsmenge, bei deren Produktion die geringsten durchschnittlichen variablen Kosten entstehen.

Kurzfristige Preisuntergrenze (KPU):
Die KPU ist hier der Preis, der den minimalen durchschnittlichen variablen Kosten entspricht.

Cournot-Punkt (CP):
Unter dem CP versteht man den Punkt auf dem Graphen der *Preis-Absatz-Funktion (PAF)* eines Monopolisten, der an derselben Stelle liegt, wie der Schnittpunkt zwischen Grenzkosten- und Grenzerlösfunktion. Dies dokumentiert die gewinnmaximale Menge und der zu ihr gehörende Preis.

Gewinnschwelle und Gewinngrenze:
Der Gewinn eines Betriebes errechnet sich aus der Differenz des erzielten Erlöses und der entstandenen Kosten zur gleichen Menge. Bei Aufnahme der Produktion sind die Kosten aufgrund bestehender Fixkosten zunächst höher als die Erlöse, der Betrieb befindet sich in der Verlustzone. Bei einer bestimmten Produktionsmenge geht der Betrieb von der Verlust- in die Gewinnzone über; diese Stelle wird als Gewinnschwelle bezeichnet (d.h. Kosten = Erlöse).
Bei ertragsgesetzlichem Kostenverlauf gibt es im ersten Quadranten einen zweiten Schnittpunkt zwischen Kosten- und Erlösfunktion, bei dem ein Übergang von der Gewinn- in die zweite Verlustzone erfolgt. Diese Stelle wird als Gewinngrenze bezeichnet.

Ökonomische Funktionen:

Preis-Absatz-Funktion $z.B. \quad p(x) = c \quad oder \quad p(x) = mx + b \quad oder \quad p(x) = ax^2 + bx + c$

Umsatz-Funktion: „Preis * Menge" => $u(x) = p(x) \cdot x$

Gewinnfunktion: „Umsatz – Kosten" => $g(x) = u(x) - k(x) = p(x) \cdot x - k(x)$

Sättigungsgrenze:
Unter der Sättigungsmenge versteht man die Menge, bei der auf dem Markt selbst zum Preis von 0,00 € keine weiteren Produkte mehr absetzen kann, da der Markt gesättigt ist.

Kurvendiskussion

(1) Symmetrie:

Achsensymmetrie (y-Achse): $f(-x) = f(x)$

Punktsymmetrie (Ursprung): $f(-x) = -f(x)$

(2) Extremwerte:

MAXIMUM

$$f'(x_0) \overset{!}{=} 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) < 0$$

oder als Ersatzkriterium:

$$f'(x_0) \overset{!}{=} 0 \quad \wedge \quad f'(x_0 - h) > 0 \quad \wedge \quad f'(x_0 + h) < 0$$

MINIMUM

$$f'(x_0) \overset{!}{=} 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) > 0$$

oder als Ersatzkriterium:

$$f'(x_0) \overset{!}{=} 0 \quad \wedge \quad f'(x_0 - h) < 0 \quad \wedge \quad f'(x_0 + h) > 0$$

(3) Wendepunkte:

$$f''(x_0) \overset{!}{=} 0 \quad \wedge \quad f'''(x_0) \neq 0$$

oder als Ersatzkriterium: *Vorzeichenwechsel bei* $f''(x_0)$

(i) $\quad f''(x_0) \overset{!}{=} 0 \quad \wedge$

(ii) $\quad \left[f''(x_0 - h) > 0 \quad \wedge \quad f''(x_0 + h) < 0\right] \quad \vee$

$\qquad \left[f''(x_0 - h) < 0 \quad \wedge \quad f''(x_0 + h) > 0\right]$

(4) Krümmung:

KONVEX / LINKSKRÜMMUNG $\quad f''(x) \geq 0$

KONKAV / RECHTSKRÜMMUNG $\quad f''(x) \leq 0$

(5) <u>Ortskurve der Extremwerte:</u>

$$f_k\,'(x_0) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ stationäre Stelle in Abhängigkeit des Parameters k

$\Rightarrow$ nach k auflösen

$\Rightarrow$ Ausdruck für k in $f_k(x)$ einsetzen

(6) <u>Grenzwertverhalten:</u>

u.a. Regeln von L'Hospital:

Unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0$ *und* 1^∞ können mit Hilfe der Regeln von L'Hospital untersucht werden:

(i) Für $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ *und* $g'(x_0) \neq 0$ gilt:

Fall: $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Sollte immer noch ein unbestimmter Ausdruck vorliegen, kann das Verfahren wiederholt werden, bis ein bestimmter Ausdruck resultiert.

(ii) Für $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ *und* $g'(x_0) \neq 0$ gilt:

Fall: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Sollte immer noch ein unbestimmter Ausdruck vorliegen, kann das Verfahren wiederholt werden, bis ein bestimmter Ausdruck resultiert.

Umformungen für die übrigen unbestimmten Ausdrücke:

Fall: $0\cdot\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad und \quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

$$\Rightarrow \quad f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Fall: $\infty-\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

$$\Rightarrow \quad f(x)-g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \overset{Hauptnenner}{=} \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

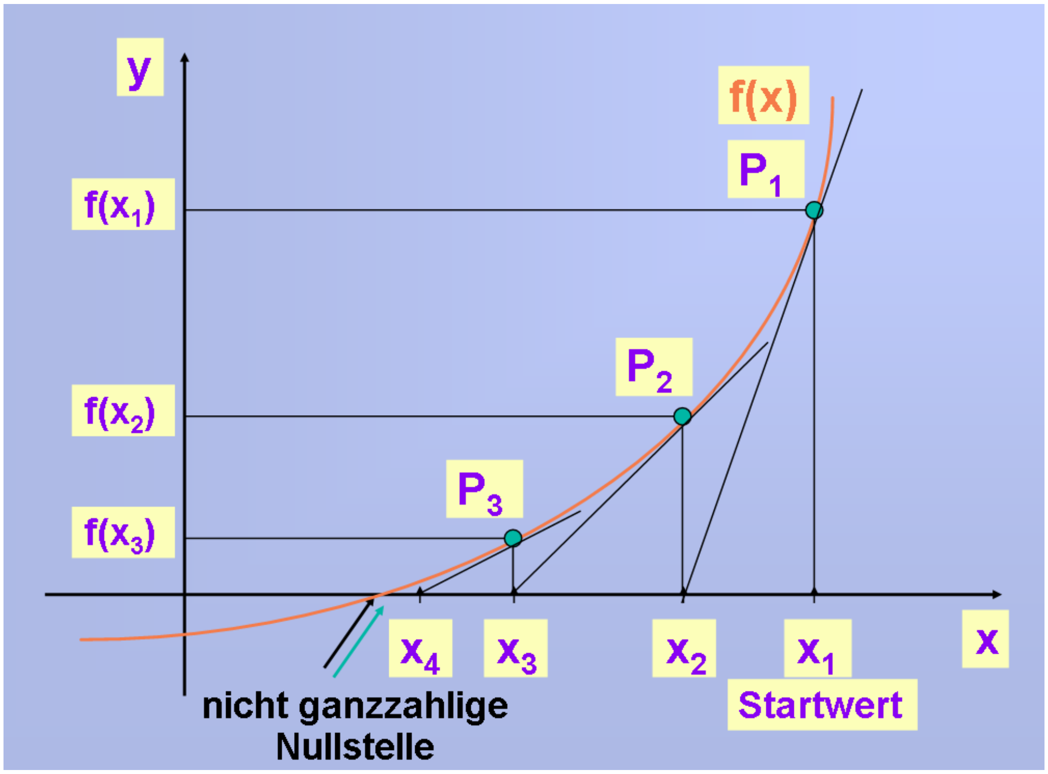
Fälle: 0^0 , ∞^0 und 1^∞ $\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \quad mit \quad f(x) > 0 \quad \forall x\in D(f)$

$$aus \quad y(x) = f(x)^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \ln\left[y(x)\right] = g(x)\cdot f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \ln\left[y(x)\right] = \begin{cases} A \\ \infty \\ -\infty \end{cases} \text{, so erhält man} \quad \lim_{x\to x_0} y(x) = \begin{cases} e^A \\ e^\infty \to \infty \\ e^{-\infty} \to 0 \end{cases}$$

Newton-Verfahren

Iterationsverfahren zur Bestimmung (nicht – ganzzahliger) Nullstellen von Funktionen



Vorgehensweise:

(1) Startwert x_0 festlegen

(2) Folgewerte mit Formel ermitteln:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad mit \quad f'(x_n) \neq 0$$

Voraussetzung für die Konvergenz in der Umgebung $U(x)$ einfacher Nullstellen:

$$\frac{|f(x_n) \cdot f''(x_n)|}{[f'(x_n)]^2} = k < 0 \qquad mit\ x \in U(x)$$

Integration

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Ist $f(x)$ auf dem Intervall D stetig, dann ist die auf D definierte Integralfunktion

$I: \quad x \to \int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar und es gilt: $I' = f$

Ist F eine beliebige Stammfunktion der auf dem Intervall D stetigen Funktion f, dann

gilt für a, b $\in$ D: $\int_a^b f(t)\,dt \quad = \quad F(b) - F(a)$

Rechenregeln zum Integral:

(1) Intervalladditivität: $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt \quad = \quad \int_a^c f(t)\,dt$

(2) Vertauschen der Grenzen: $\int_a^b f(t)\,dt \quad = \quad -\int_b^a f(t)\,dt$

(3) Linearität: $\int_a^b \left[r \cdot f(t) + s \cdot g(t)\right] dt \quad = \quad r \cdot \int_a^b f(t)\,dt + s \cdot \int_a^b g(t)\,dt$

(4) gleiche Grenzen: $\int_a^a f(t)\,dt \quad = \quad 0$

Volumen von Drehkörpern:

Rotation des Schaubildes von $f(x)$ ...

... um die x-Achse: $V_a^b \quad = \quad \pi \cdot \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$

... um die y-Achse: $V_c^d \quad = \quad \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} \left[f^{-1}(y)\right]^2 dy \quad = \quad \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy \quad \overset{f'(x) = \frac{dy}{dx}}{=} \quad \pi \cdot \int_a^b x^2 f'(x)\,dx$

Bogenlänge: $$s = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Mantelfläche: $$M_a^b = 2\pi \cdot \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Ökonomische Anwendungen:

Marktgleichgewicht: Schnittpunkt $\left(x_0 \mid p(x_0)\right)$ zwischen Angebotsfunktion $p_A(x)$ und Nachfragefunktion $p_N(x)$.

Konsumentenrente: Das ist der Betrag in GE, den die Konsumenten insgesamt bereit zu zahlen gewesen wären, wenn jeder den für ihn höchsten akzeptablen Preis gezahlt hätte.

$$K_R(x) = \int_0^{x_0} p_N(x)\,dx - x_0 \cdot p_N(x_0)$$

Produzentenrente: Diejenigen Anbieter, die zu einem geringeren Preis verkauft hätten, erhalten dadurch einen zusätzlichen Gewinn, dessen Summe als Produzentenrente bezeichnet wird.

$$P_R(x) = x_0 \cdot p_A(x_0) - \int_0^{x_0} p_A(x)\,dx$$

Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

Funktion mit mehreren Variablen:

Eine reelle Funktion mit mehreren Variablen $\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ ist definiert als eine

Abbildung
$$\begin{aligned} f:\quad & \Re^n \quad \to \quad \Re \qquad mit\ n \geq 2 \quad und\ n \in N \\ & \left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right) \quad \to \quad x_{n+1} = f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right) \end{aligned}$$

Partielle Ableitung:

Unter der partiellen Ableitung (1. Ordnung) der Funktion $f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ nach der Variablen x_i versteht man die Ableitung von $f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ nach x_i unter Konstanthaltung aller übrigen Variablen.

Schreibweisen:
$$\frac{\partial f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)}{\partial x_i} \quad oder \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad oder \quad f_{x_i}$$

Ökonomische Interpretation: Der Wert der partiellen Ableitung gibt an, um wie viel Einheiten sich der Funktionswert $f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ ändert, wenn sich x_i um eine Einheit ändert, während alle übrigen Variablen konstant bzw. unverändert bleiben (ceteris paribus-Bedingung).

Entsprechende Ableitungen höherer Ordnung sind ebenfalls möglich und besitzen folgende Schreibweisen:
$$\frac{\partial^2 f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)}{\partial x_i \partial x_k} \quad oder \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \quad oder \quad f_{x_i x_k}$$

Satz von Schwarz: Sind für die Funktion $f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ sämtliche zweite Ableitungen stetig, so sind diese unabhängig von der Differentiationsreihenfolge und es gilt:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} \quad oder \quad f_{x_i x_k} = f_{x_k x_i}$$

Gradient: Vektor der ersten partiellen Ableitungen

$$grad(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Hesse-Matrix: Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \ldots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \ldots & f_{x_2 x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \ldots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

Fall n = 2:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{pmatrix}$$

Extrema bei Funktionen mit mehreren Variablen ohne Nebenbedingungen:

(1) Stationäre Stelle(n) ermitteln:

$$grad(f) \overset{!}{=} \vec{0} = (0, 0, \ldots, 0) \Rightarrow P\left(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}, f\right)$$

(2) Prüfen der stationären Stellen mittels Hesse-Matrix

Hinreichende Bedingung für ein relatives Extremum:

Für den Fall n = 2 gilt daher:

$$Maximum \quad \Leftrightarrow \quad negativ\ definit \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_{x_1 x_1} < 0 \\ \det\begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{pmatrix} > 0 \end{cases}$$

$$Minimum \quad \Leftrightarrow \quad positiv\ definit \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_{x_1 x_1} > 0 \\ \det\begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{pmatrix} > 0 \end{cases}$$

Allgemein gilt folgendes:

Die Funktion $f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ besitze in $P\left(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}, f\right)$ eine stationäre Stelle d.h. $grad(f) \overset{!}{=} \vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, und habe in $P\left(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}, f\right)$ stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung.

Aus der Definitheit der Hesse-Matrix $H(f)$ der Funktion $f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ folgt:

Ist die Hesse-Matrix $H(f)$ in $P\left(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}, f\right)$

a) **positiv definit**, dann hat $f(\ldots)$ in $P\left(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}, f\right)$ ein rel. Minimum.

b) **negativ definit**, dann hat $f(\ldots)$ in $P\left(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}, f\right)$ ein rel. Maximum.

c) **indefinit**, dann hat $f(\ldots)$ in $P\left(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}, f\right)$ einen Sattelpunkt.

<u>Definition zur Definitheit der Hesse-Matrix</u> $H(f)$:

$$(i) \quad H(f) \text{ positiv definit} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(H_i(f)\right) > 0$$

$$(ii) \quad H(f) \text{ negativ definit} \quad \Leftrightarrow \quad (-1)^i \det\left(H_i(f)\right) > 0$$

$H_i(f)$ sind die jeweiligen Teil- bzw. Untermatrizen der Hesse-Matrix; von diesen werden die sogenannten Hauptminoren bzw. Hauptabschnittsdeterminanten berechnet: Beispiel für den Fall n= 3:

$$\left|H_1(f)\right| = \left|f_{x_1 x_1}\right| \quad \wedge \quad \left|H_2(f)\right| = \begin{vmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{vmatrix}$$

$$\wedge \quad \left|H_3(f)\right| = \begin{vmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & f_{x_1 x_3} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & f_{x_2 x_3} \\ f_{x_3 x_1} & f_{x_3 x_2} & f_{x_3 x_3} \end{vmatrix}$$

Extrema bei Funktionen mit mehreren Variablen mit Nebenbedingungen:

Lösungsverfahren: (1) Variablensubstitution
(2) Lagrangeansatz

⇨ Das Optimierungsverfahren mit Lagrange-Multiplikatoren

Lagrange-Verfahren

Idee nach einem von Joseph-Louis Lagrange entwickelten:
Man erweitert die Zielfunktion f, indem man jede Nebenbedingung mit einem sogenannten Lagrange-Multiplikator als zusätzliche Variable multipliziert und diesen Term dann additiv mit der Zielfunktion verknüpft.
Danach wird per Differentialrechnung und mittels Lösung eines Gleichungssystems das Austauschverhältnis der am Prozess beteiligten Faktoren, das Maximum/Minimum der Zielfunktion und die Werte des Lagrangemultiplikators bzw. der Lagrangemultiplikatoren berechnet, um diese dann für eine Sensitivitätsanalyse verwenden zu können.

Lagrangeansatz

=> für den Fall n=2 und eine Nebenbedingung:

$$L(x_1, x_2, \lambda) \quad = \quad f(x_1, x_2) + \lambda \cdot g(x_1, x_2)$$

$f(x_1, x_2)$ ist die Zielfunktion $\qquad g(x_1, x_2)$ ist die Nebenbedingung

Vorgehensweise:

Stationäre Stelle ermitteln

=> Austauschverhältnis ermitteln

=> Berechnen der Extrema

unter Verwendung der Nebenbedingung

Anmerkung:

notwendige Bedingung genügt bei konvexen Zielfunktionen bzw. Nebenbedingungen.

=> für den Fall n Variablen und k Nebenbedingungen:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \quad = \quad f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot g_i(x_1, \dots, x_n)$$

$f(x_1, \dots, x_n)$ *ist die Zielfunktion* $\qquad g_i(x_1, \dots, x_n)$ sind die Nebenbedingungen

Daraus entsteht im ersten Durchgang folgende erweiterte Hesse-Matrix:

$$H_{L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)} \quad = \quad \begin{array}{cc} \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k & x_1 & \dots & x_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} L_{\lambda_1,\lambda_1} & L_{\lambda_1,\lambda_2} & \dots & L_{\lambda_1,\lambda_k} & L_{\lambda_1,x_1} & \dots & L_{\lambda_1,x_n} \\ L_{\lambda_2,\lambda_1} & L_{\lambda_2,\lambda_2} & \dots & L_{\lambda_2,\lambda_k} & L_{\lambda_2,x_1} & \dots & L_{\lambda_2,x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{\lambda_k,\lambda_1} & L_{\lambda_k,\lambda_2} & \dots & L_{\lambda_k,\lambda_k} & L_{\lambda_k,x_1} & \dots & L_{\lambda_k,x_n} \\ L_{x_1,\lambda_1} & L_{x_1,\lambda_2} & \dots & L_{x_1,\lambda_k} & L_{x_1,x_1} & \dots & L_{x_1,x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{x_n,\lambda_1} & L_{x_n,\lambda_2} & \dots & L_{x_n,\lambda_k} & L_{x_n,x_1} & \dots & L_{x_n,x_n} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{matrix} \end{array}$$

Nun können einige Vereinfachungen durchgeführt werden:

(1) Nach dem Satz von Schwarz gilt: $L_{\lambda_a, x_b} = L_{x_b, \lambda_a}$ **=> Matrix ist symmetrisch**

(2) Für die Ableitung nach λ_i gilt:

Ableitung der Lagrangefunktion nach den Lagrangemultiplikatoren

$\rightarrow$ erste partielle Ableitung:

$$L_{\lambda_i}\left(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k\right) \quad = \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}\left(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k\right) \quad =$$

$$L_{\lambda_i} \quad = \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} f\left(x_1,\ldots,x_n\right)+\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}\lambda_1\cdot g_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)$$

$$+\ldots+\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}\lambda_i\cdot g_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)+\ldots+\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}\lambda_k\cdot g_k\left(x_1,\ldots,x_n\right)$$

$$L_{\lambda_i} \quad = \quad 0+0+\ldots+g_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)+\ldots+0$$

Nochmaliges Ableiten nach den Lagrangemultiplikatoren:

$$L_{\lambda_i\lambda_i} \quad = \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_i \partial \lambda_i} g_i\left(x_1,\ldots,x_n\right) \quad = \quad 0$$

Zudem gilt:

$$L_{\lambda_i x_i} \quad = \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_i \partial x_i} g_i\left(x_1,\ldots,x_n\right) \quad = \quad g_{i_{x_i}}\left(x_1,\ldots,x_n\right)$$

Ergebnis: die durch die partiellen Ableitungen vereinfachte Hessematrix:

$$H_{L\left(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k\right)} \quad = \quad \left(\begin{array}{ccccccc|c}
\lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k & x_1 & \ldots & x_n & \\
\hline
0 & 0 & \ldots & 0 & g_{1,x_1} & \ldots & g_{1,x_n} & \lambda_1 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & g_{2,x_1} & \ldots & g_{2,x_n} & \lambda_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & g_{k,x_1} & \ldots & g_{k,x_n} & \lambda_k \\
g_{1,x_1} & g_{2,x_1} & \ldots & g_{k,x_1} & L_{x_1,x_1} & \ldots & L_{x_1,x_n} & x_1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
g_{1,x_n} & g_{2,x_n} & \ldots & g_{k,x_n} & L_{x_n,x_1} & \ldots & L_{x_n,x_n} & x_n
\end{array}\right)$$

Notwendiges Kriterium für eine Extremwertstelle unter Nebenbedingungen:

Gegeben sei die Zielfunktion $f\left(\vec{x}\right) = f\left(x_1,...,x_n\right)$ **mit n unabhängigen Variablen**

$\vec{x} = \left(x_1,...,x_n\right)$ **und** $g_i\left(x_1,...,x_n\right)$ mit $i \in \{1;2;...;k\}$ k Nebenbedingungen

$$\Rightarrow L\left(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k\right) = f\left(x_1,...,x_n\right) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot g_i\left(x_1,...,x_n\right)$$

die in $\overline{x} = \left(\overline{x_1},...,\overline{x_n}\right)$ **bzw.** $\overline{S_L} = \left(\overline{x},\overline{\lambda}\right) = \left(\overline{x_1},...,\overline{x_n},\overline{\lambda_1},...,\overline{\lambda_k}\right)$ **eine stationäre Stelle besitzt.**

Hinreichendes Kriterium für eine Extremwertstelle unter Nebenbedingungen:

Neben der notwendigen Bedingung muss

$L\left(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k\right) = f\left(x_1,...,x_n\right) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot g_i\left(x_1,...,x_n\right)$ **zweimal stetig differenzierbar sein und folgende Bedingung(en) erfüllen:**

Bei Betrachtung der Determinanten der Hauptminoren bzw. aller Haupunterdeterminanten der erweiterten Hesse-Matrix mit eingesetzten stationären Stellen

$\overline{S_L} = \left(\overline{x},\overline{\lambda},f\right) = \left(\overline{x_1},...,\overline{x_n},\overline{\lambda_1},...,\overline{\lambda_k},f\right)$,

$$H_{L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k)} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_k & x_1 & ... & x_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & g_{1,x_1} & ... & g_{1,x_n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & g_{2,x_1} & ... & g_{2,x_n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & g_{k,x_1} & ... & g_{k,x_n} \\ g_{1,x_1} & g_{2,x_1} & ... & g_{k,x_1} & L_{x_1,x_1} & ... & L_{x_1,x_n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ g_{1,x_n} & g_{2,x_n} & ... & g_{k,x_n} & L_{x_n,x_1} & ... & L_{x_n,x_n} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ ... \\ \lambda_k \\ x_1 \\ ... \\ x_n \end{matrix} \end{array}$$

welche mehr als 2k Zeilen/Spalten haben

MINIMUM $\Leftrightarrow$ **Alle Determinanten besitzen das Vorzeichen $(-1)^k$**
Sollten einige (wenige) Det. den Wert 0 besitzen, werden diese ignoriert.

MAXIMUM $\Leftrightarrow$ **Alle Determinanten besitzen wechselnde Vorzeichen mit**

$$Det\left[H\left(\overline{S_L}\right)\right] \quad Vorzeichen \quad (-1)^n$$

Kein Extremum: ***Determinantenwerte besitzen nicht die vorgegebene VZ-Folge.***

Anlagen/Quellen:
https://mjo.osborne.economics.utoronto.ca/index.php/tutorial/index/1/toc
http://www.slimy.com/~steuard/teaching/tutorials/Lagrange.html
http://web.cs.iastate.edu/~cs577/handouts/lagrange-multiplier.pdf
https://www.uni-marburg.de/de/fb02/professuren/qm/statistik/links

Beispiele:
Fall 1: **zwei unabhängige Variablen – eine NB** **n = 2 und k = 1**

$$L(x_1, x_2, \lambda) \;=\; f(x_1, x_2) + \lambda \cdot g(x_1, x_2) \;=\; x_1 + x_2 + \lambda \cdot \left(1 - x_1^{\,2} - x_2^{\,2}\right)$$

$$L(x_1, x_2, \lambda) \;=\; f(x_1, x_2) + \lambda \cdot g(x_1, x_2) \;=\; x_1 + x_2 + \lambda \cdot \left(1 - x_1^{\,2} - x_2^{\,2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) \;=\; 1 - 2\lambda \cdot x_1 = 0 \;\;=>\;\; \lambda = \dfrac{1}{2x_1} \\[2ex] L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) \;=\; 1 - 2\lambda \cdot x_2 = 0 \;\;=>\;\; \lambda = \dfrac{1}{2x_2} \end{array}\right\} \dfrac{1}{2x_1} = \dfrac{1}{2x_2} \;\;=>\;\; x_1 = x_2$$

$$L_\lambda(x_1, x_2, \lambda) \;=\; 1 - x_1^{\,2} - x_1^{\,2} = 0 \;\;=>\;\; 1 = 2x_1^{\,2} \;\;=>\;\; x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = x_2 \;\;=>\;\; \lambda = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -2x_1 & -2x_2 \\ -2x_1 & -2\lambda & 0 \\ -2x_2 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad und \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Auswertung ab 3 Spalten/Zeilen

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Det\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0+0+0-\left(-2\cdot\sqrt{2}\right)-\left(-2\cdot\sqrt{2}\right) = 4\cdot\sqrt{2} > \quad \Rightarrow \quad Max$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Det\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = 0+0+0-\left(2\cdot\sqrt{2}\right)-\left(2\cdot\sqrt{2}\right) = -4\cdot\sqrt{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad Min$$

Fall 2: drei unabhängige Variablen – eine NB

⇨ n = 3 und k = 1

$$L\left(x_1, x_2, x_3, \lambda\right) = f\left(x_1, x_2, x_3\right) + \lambda \cdot g\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

$$L\left(x_1, x_2, x_3, \lambda\right) = 2x_1 + 4x_2 + \sqrt{28}x_3 + \lambda \cdot \left(12 - x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} - x_3^{\ 2}\right)$$

Fall 3: drei unabhängige Variablen – zwei NB

⇨ n = 3 und k = 2

$$L\left(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2\right) = f\left(x_1, x_2, x_3\right) + \lambda_1 \cdot g_1\left(x_1, x_2, x_3\right) + \lambda_2 \cdot g_2\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

$$L\left(x_1, x_2, x_3, \lambda\right) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + \lambda_1 \cdot \left(12 - x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} - x_3^{\ 2}\right) + \lambda_2 \cdot \left(12 - 4x_1 - 2x_2\right)$$

Vollständiges (totales) Differential:

Unter dem vollständigen Differential $df\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ der differenzierbaren Funktion $f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ versteht man die Summe aller partiellen Differentiale:

$$df \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

Für den Fall n = 2: Ableitung von Funktionen in impliziter Form mit $f\left(x_1, x_2\right) = 0$

$$df \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 \quad = \quad 0 \quad \xrightarrow{:dx_1}$$

$$0 \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} \quad \longrightarrow \quad \frac{dx_2}{dx_1} \quad = \quad -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} \quad = \quad -\frac{f_{x_1}}{f_{x_2}}$$

- ⇨ Ableitung impliziter Funktionen
- ⇨ Grenzrate der Substitution einer Produktions- oder Nutzenfunktion

Matrizen und Determinanten

Matrix:

Eine Anordnung von $n \cdot m$ Zahlen in n Zeilen und m Spalten heißt Matrix. a_{ik} ist die Zahl in der i-ten Zeile und k-ten Spalte.

$$A_{(n,m)} = \left(a_{ik}\right)_{(n,m)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Reguläre Matrix: $A \quad \textit{regulär} \quad \Leftrightarrow \quad Det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \quad \textit{invertierbar}$

Singuläre Matrix: A singulär $\quad \Leftrightarrow \quad Det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ nicht invertierbar

Besondere Matrizen: o.B.d.A. wird hier das Format (n,n) = (3,3) verwendet

(1) Quadratische Matrix:
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}_{(n,n)}$$

(2) Dreiecksmatrix:
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}_{(n,n)} \quad \textit{oder} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}_{(n,n)}$$

(3) Diagonalmatrix:
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}_{(n,n)}$$

(4) Einheitsmatrix:
$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n,n)}$$

(5) Transponierte Matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}_{(n,n)} \xrightarrow{\text{Trans-ponieren}} A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}_{(n,n)} \xrightarrow{\text{Trans-ponieren}} \left(A^T\right)^T = A$$

<u>Rechenoperationen</u> $o.B.d.A.: \quad (n,m) = (2,2)$

(1) Addition/Subtraktion:

(i) Elementweise Addition/Subtraktion entsprechender Elemente von A und B;

(ii) Voraussetzung: gleiches Format

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \pm b_{1,1} & a_{1,2} \pm b_{1,2} \\ a_{2,1} \pm b_{2,1} & a_{2,2} \pm b_{2,2} \end{pmatrix}$$

(2) Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar:

Jedes Element der Matrix wird mit dem Faktor multipliziert.

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{1,1} & k \cdot a_{1,2} \\ k \cdot a_{2,1} & k \cdot a_{2,2} \end{pmatrix}$$

(3) Multiplikation zweier Matrizen:

(i) Multiplikation mit Hilfe des FALK-Schemas

$$o.B.d.A.: \quad (n,m) = (2,2)$$

$$A \cdot B \overset{FALK-Schema}{=} \begin{array}{cc|cc} & & b_{1,1} & b_{1,2} \\ & & b_{2,1} & b_{2,2} \\ \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,1} \cdot b_{1,1} + a_{1,2} \cdot b_{2,1} & a_{1,1} \cdot b_{1,2} + a_{1,2} \cdot b_{2,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,1} \cdot b_{1,1} + a_{2,2} \cdot b_{2,1} & a_{2,1} \cdot b_{1,2} + a_{2,2} \cdot b_{2,2} \end{array}$$

(ii) Voraussetzung:

Anzahl der Spalten des 1. Faktors = Anzahl der Zeilen des 2. Faktors

$$(n,\boxed{k) \quad \cdot \quad (k},m) \quad = \quad (n,m)$$

(4) Ermittlung der inversen Matrix: A^{-1}

Voraussetzung: Ausgangsmatrix muss quadratisch sein.

$$\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline \text{Lösen} & \text{des LGS} \\ \text{mittels} & \text{Gauß} \\ \hline E & A^{-1} \end{array}$$

<u>Alternatives Verfahren zur Invertierung von Matrizen: adjungierte Matrix</u>

Schritt 1: Unterdeterminanten für die jeweiligen Positionen bilden

Schritt 2: Transponieren der Matrix

Schritt 3: Vorzeichenschema entspr. der Laplace-Entwicklung anwenden

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Ergebnis-Matrix mit Kehrwert der Determinante multiplizieren

Rechengesetze

(1) Distributivgesetz: $(A+B)\cdot C \quad = \quad A\cdot C + B\cdot C$

(2) Assoziativgesetz: $(A\cdot B)\cdot C \quad = \quad A\cdot(B\cdot C)$

(3) Kommutativgesetz gilt im Allgemeinen nicht: $A\cdot B \quad \neq \quad B\cdot A$

Ausnahmen: (i) $A\cdot A^{-1} \quad = \quad A^{-1}\cdot A \quad = \quad E$

(ii) $A\cdot E \quad = \quad E\cdot A \quad = \quad A$

Ökonomische Anwendungen zur Materialverflechtung und Kostenberechnung

(1) Materialverflechtungen: $M_{RZ}\cdot M_{ZE} \quad = \quad M_{RE}$

(2) Kostenberechnung (gesamt): $\vec{k}_{gesamt} \quad = \quad \vec{k}_R\cdot M_{RE} + \vec{k}_Z\cdot M_{ZE} + \vec{k}_E$

(3) Rohstoffkosten: $\vec{k}_{Rohstoffe} \quad = \quad \vec{k}_R\cdot M_{RZ}\cdot M_{ZE} \quad = \quad \vec{k}_R\cdot M_{RE}$

(4) Fertigungskosten (Z): $\vec{k}_{Fertigung(Z)} \quad = \quad \vec{k}_Z\cdot M_{ZE}$

(5) Fertigungskosten (E): $\vec{k}_{Fertigung(Z)} \quad = \quad \vec{k}_E$

Das Leontief-Modell

Inputmatrix A bzw. technologische Matrix T aus der Input-Output-Tabelle

(1) $T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x}$

(2) $\vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} = (E - T) \cdot \vec{x}$

(3) $\vec{x} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{y}$ mit Leontief-Inverse $(E - T)^{-1}$

Produktionsvektor $\vec{x}$ geben.
Wir wissen, dass sich der Produktionsvektor wie folgt berechnet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix}$$

und durch etwas Umformung erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix A}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

und jetzt den letzten Term noch etwas umgeformt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{x} = T \cdot \vec{x} + \vec{y}$$

Die Matrix T heißt ***technologische Matrix*** oder ***Input-Matrix***. Sie gibt den für den Produktionsprozess notwendigen Input an. Die Koeffizienten von T werden auch als ***Produktionskoeffizienten*** bezeichnet.
Die Elemente der Matrix T geben an, wie viele Einheiten von einem Sektor für jede Einheit eines anderen Sektors bereitzustellen sind, damit der wechselseitige Bedarf gedeckt wird.

Determinante:

Man entwickelt die Determinante einer quadratischen Matrix nach den Elementen einer beliebigen Zeile (Spalte), indem man die Elemente der gewählten Zeile (Spalte) mit ihren zugehörigen Unterdeterminanten multipliziert und die Produkte summiert. Dabei bekommt jedes Produkt aus Element und Unterdeterminante das Vorzeichen, das sich aus der Position des Elements in folgendem Schema ergibt:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Schreibweisen: $\det(A) \quad oder \quad \mathrm{Det}(A) \quad oder \quad |A|$

Entwicklungssatz nach Laplace: $\det(A) \;=\; \sum_{i,k}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot A_{ik}$

Fall 1: Format 2 x 2 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \;=\; a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$

Fall 2: Format 3 x 3

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \overset{Sarrus}{=} \begin{array}{l} a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 \\ -a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_2 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 \end{array}$$

Determinanten zu Matrizen mit höheren Formaten müssen entweder per Laplace-Entwicklung berechnet werden oder zuerst mittels Gauß-Verfahren in eine Diagonal- oder Dreiecksmatrix verändert werden.

Rechengesetze zu Determinanten:

(1) $\det(A) \;=\; \det\left(A^T\right)$

(2) Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten führt zu einer Vorzeichenänderung:

$$\det(\dots \quad a_i \quad \dots \quad a_k \quad \dots) \;=\; -\det(\dots \quad a_k \quad \dots \quad a_i \quad \dots)$$

(3) $\det(\ldots \quad a_i \quad \ldots \quad 0 \quad \ldots) = 0$

(4) $\det(\ldots \quad a_i \quad \ldots \quad k \cdot a_i \quad \ldots) = 0$

(5) $\det(a_1 \quad \ldots \quad k \cdot a_i \quad \ldots \quad k \cdot a_n) = k^2 \cdot \det(a_1 \quad \ldots \quad a_i \quad \ldots \quad a_n)$

(6) $\det(\ldots \quad a_i + b_i \quad \ldots) = \det(\ldots \quad a_i \quad \ldots) + \det(\ldots \quad b_i \quad \ldots)$

Aber: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

(7) $\det(a_1 \quad \ldots \quad a_i + k \cdot a_j \quad \ldots \quad a_n) = \det(a_1 \quad \ldots \quad a_i \quad \ldots \quad a_n)$

(8) Der Wert der Determinanten einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c \qquad Sonderfall: \quad \det(E) = 1$$

(9) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(10) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Lineare Gleichungssysteme

$$o.B.d.A.: \quad n = 3$$

Inhomogenes LGS: $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \qquad oder \qquad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Homogenes LGS: $A \cdot \vec{x} = \vec{0} \qquad oder \qquad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösungsverfahren:

(1) Additionsverfahren (2) Einsetzungsverfahren

(3) Gleichsetzungsverfahren (4) Graphische Lösung

(5) **Cramer-Regel**

Cramer-Regel: Lösung von LGS der Form $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ durch

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad mit\ i = 1, 2, ..., n$$

wobei $D = Det(A)$ und

bei D_i die i-te Spalte der Matrix A durch $\vec{b}$ ersetzt wird.

(6) **Gauß-Verfahren**

Gauß-(Eliminations-)Verfahren:

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $\left(A \mid \vec{b} \right)$ wird durch elementare Äquivalenzumformungen der Zeilen in die Matrix $\left(E \mid \vec{b}^* \right)$.

Anstelle der Matrix E genügt auch eine Matrix in Dreiecks- oder Stufenform.

Mögliche Umformungsschritte:

(1) Vertauschen der Gleichungs- bzw. Zeilen-Reihenfolge

(2) Multiplikation einer Gleichung bzw. Zeile mit einer Zahl $c \in \Re \setminus \{0\}$

(3) Ersetzen einer Gleichung / Zeile durch die Summe aus ihr und dem Vielfachen einer anderen (Addition/Subtraktion des Vielfachen einer anderen Gleichung / Zeile mit derjenigen, die verändert werden soll)

Lineare Optimierung

Lösung eines Maximierungsproblems mittels regulärer Simplexmethode bzw. mit dem Simplexalgorithmus

(1) Aufstellen des linearen Ungleichungssystems aus m Ungleichungen mit n Problemvariablen (= Nebenbedingungen) und der Zielfunktion

(2) Umformung des linearen Ungleichungssystems in ein lineares Gleichungssystem durch Einführung je einer Schlupfvariablen (Basisvariablen) pro Ungleichung

(3) Erstellung eines Tableaus (LGS aus Nebenbedingungen und Zielfunktion) mit Hilfe der Koeffizienten der Variablen

(4) Pivot-Spalte mittels <u>*größtem*</u> Koeffizient in der Zielfunktion ermitteln, dann mit der Spalte die Zeile mit dem größten Engpass (d.h. kleinster positiver Quotient aus Ergebnisspalte und Koeffizienten der Pivot-Spalte) anhand der Restriktionen berechnen (=> Pivot-Zeile)
Anmerkung: Sind mehrere Koeffizienten gleich groß, dann kann einer frei gewählt werden.

(5) Pivot-Element bestimmen (Kombination aus Pivot-Spalte und Pivot-Zeile)

(6) Pivot-Element mittels Gauß-Verfahren zu 1 umformen

(7) Alle anderen Elemente in der Pivot-Spalte mittels Gauß-Verfahren zu 0 umformen

(8) Mit dem nächsten <u>*größten negativen*</u> Koeffizient der Zielfunktion fortsetzen und das Verfahren wie bisher wiederholen

(9) Ist kein Wert der Zielfunktion mehr positiv, dann ist die Lösung optimal

Sollte ein Minimierungsproblem vorliegen, dann muss dies per Dualisierung in ein Maximierungsproblem umgewandelt werden, damit das Verfahren anwendbar ist.

Finanzmathematik

Zinsrechnung (jährliche Verzinsung)

(1) Endwert:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \underset{q=1+i}{=} K_0 \cdot q^n \underset{i=\frac{p}{100}}{=} K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

(2) Barwert:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} \underset{q=1+i}{=} \frac{K_n}{q^n} \underset{i=\frac{p}{100}}{=} \frac{K_n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$$

Zinsrechnung (unterjährige Verzinsung):

Endwert: $$K_{n,m} = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\cdot m} \underset{i=\frac{p}{100}}{=} K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100\cdot m}\right)^{n\cdot m}$$

Zinsrechnung (stetige Verzinsung):

Endwert: $$K_n = K_0 \cdot e^{i\cdot n} \underset{i=\frac{p}{100}}{=} K_0 \cdot e^{\frac{p}{100}\cdot n}$$

Effektivverzinsung: $$i_{eff} = \sqrt[n]{q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n} - 1$$

Rentenrechnung:

	nachschüssig	**vorschüssig**
Rentenendwert	$K_{n(nach)} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$	$K_{n(vor)} = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$
Rentenbarwert	$K_{0(nach)} = \frac{a}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$	$K_{0(vor)} = \frac{a}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$

Endwert Kapitalaufbau bzw. Kapitalverzehr:

$$K_{n\,(vor)} \quad = \quad K_0 \cdot q^n \pm a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_{n\,(nach)} \quad = \quad K_0 \cdot q^n \pm a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ewige Rente

(1) Rentenhöhe: $a_n = K_0 \cdot i$

(2) Barwert der Rente: $K_0 = \frac{a_n}{i}$

Kapitalwert:

$$C_0 \quad = \quad - A_0 \quad + \quad \sum_{t=1}^{n} (e_t - a_t) \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \quad + \quad \frac{RBW}{(1+i)^t}$$

A_0 = Anfangsauszahlung; $e_t - a_t$ = Einzahlungsüberschüsse bzw. Rückflüsse

RBW = Restwert nach n Jahren

Interner Zinsfuß:

$$Ansatz: \quad C_0 \quad = \quad 0$$

Danach muss der interne Zins mittels geeigneten Iterationsverfahren (z.B. Newton-Iteration) ermittelt werden.