Matrizen und Determinanten

Matrix:

Eine Anordnung von $n \cdot m$ Zahlen in n Zeilen und m Spalten heißt Matrix. a_{ik} ist die Zahl in der i-ten Zeile und k-ten Spalte.

$$A_{(n,m)} = \left(a_{ik}\right)_{(n,m)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Reguläre Matrix: $A \quad regul\ddot{a}r \quad \Leftrightarrow \quad Det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \quad invertierbar$

Singuläre Matrix: $A \text{ singulär} \quad \Leftrightarrow \quad Det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ nicht invertierbar}$

Besondere Matrizen: o.B.d.A. wird hier das Format (n,n) = (3,3) verwendet

(1) Quadratische Matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}_{(n,n)}$$

(2) Dreiecksmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}_{(n,n)} \quad oder \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}_{(n,n)}$$

(3) Diagonalmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}_{(n,n)}$$

(4) Einheitsmatrix:

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n,n)}$$

(5) Transponierte Matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}_{(n,n)} \xrightarrow{\substack{\text{Trans-}\\\text{ponieren}}} A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}_{(n,n)} \xrightarrow{\substack{\text{Trans-}\\\text{ponieren}}} \left(A^T\right)^T = A$$

Rechenoperationen $\qquad o.B.d.A.: \quad (n,m)=(2,2)$

(1) Addition/Subtraktion:

(i) Elementweise Addition/Subtraktion entsprechender Elemente von A und B; (ii)

Voraussetzung: gleiches Format

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \pm b_{1,1} & a_{1,2} \pm b_{1,2} \\ a_{2,1} \pm b_{2,1} & a_{2,2} \pm b_{2,2} \end{pmatrix}$$

(2) Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar:

Jedes Element der Matrix wird mit dem Faktor multipliziert.

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{1,1} & k \cdot a_{1,2} \\ k \cdot a_{2,1} & k \cdot a_{2,2} \end{pmatrix}$$

(3) Multiplikation zweier Matrizen:

(i) Multiplikation mit Hilfe des FALK-Schemas

$$o.B.d.A.: \quad (n,m)=(2,2)$$

$$A \cdot B \overset{FALK-Schema}{=} \begin{array}{cc|cc} & & b_{1,1} & b_{1,2} \\ & & b_{2,1} & b_{2,2} \\ \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,1} \cdot b_{1,1} + a_{1,2} \cdot b_{2,1} & a_{1,1} \cdot b_{1,2} + a_{1,2} \cdot b_{2,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,1} \cdot b_{1,1} + a_{2,2} \cdot b_{2,1} & a_{2,1} \cdot b_{1,2} + a_{2,2} \cdot b_{2,2} \end{array}$$

(ii) Voraussetzung:

Anzahl der Spalten des 1. Faktors = Anzahl der Zeilen des 2. Faktors

$$(n, \boxed{k) \quad \cdot \quad (k}, m) = (n,m)$$

Das Kommutativgesetz in der Matrizenrechnung

Unter dem Kommutativgesetz in der Mathematik versteht man die Tatsache, dass die Reihenfolge der Rechenoperatoren beliebig vertauschbar ist.

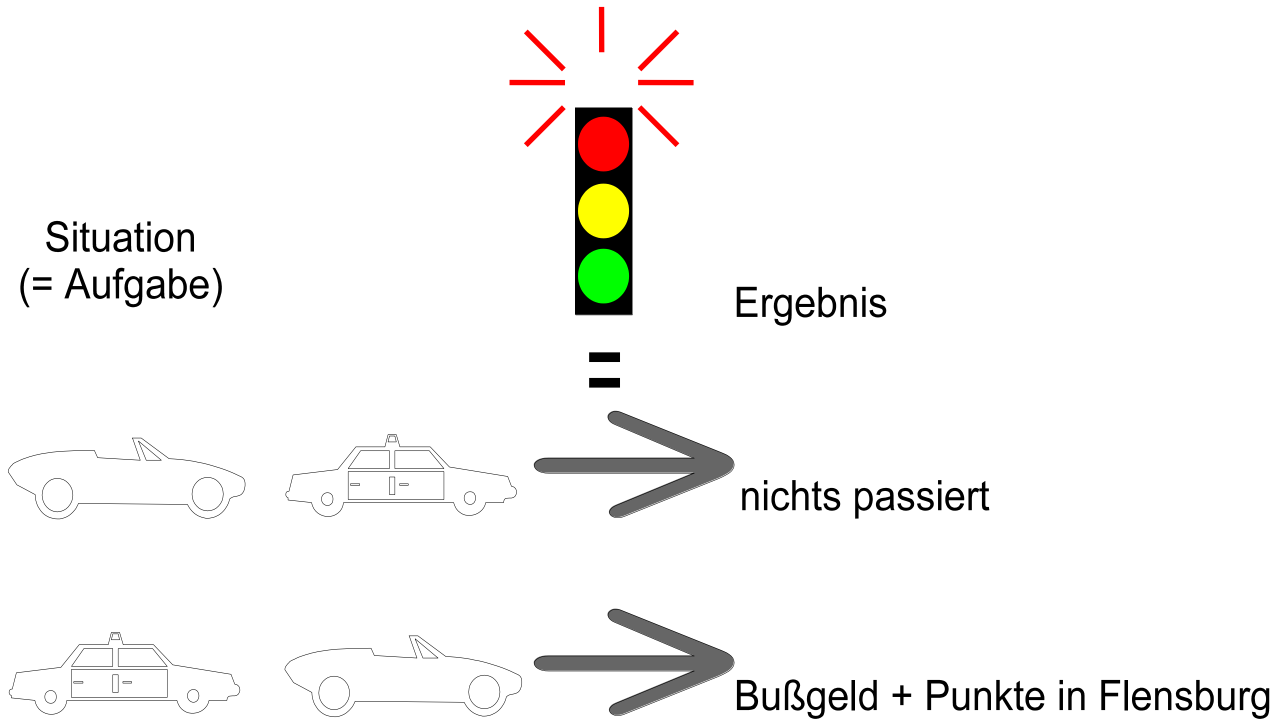
So ist die *Addition kommutativ* **(A + B = B + A);**

die *Multiplikation im Regelfall aber nicht***.**

Vergleichbar ist dieses Gesetz auch mit alltäglichen Situationen im Straßenverkehr:

So ist es unterschiedlich zu bewerten, d. h. das Ergebnis wird variieren, wenn man direkt vor einer Polizeistreife über die rote Ampel fährt oder ob man dies hinter dem Polizeiwagen tut.

Denn es gilt:



Da es zu verschiedenen Ergebnissen führt ist die Reihenfolge *nicht vertauschbar – also gilt das Kommutativgesetz normalerweise nicht.*

Ein paar Erläuterungen zur Ermittlung der Determinante einer Matrix nach Pierre-Simon Laplace

Geboren: 23. März 1749
in Beaumont-en-Auge

Gestorben: 5. März 1827 in Paris

Entwicklung von Determinanten

Man entwickelt die Determinante einer quadratischen Matrix nach den Elementen einer beliebigen Zeile (Spalte), indem man die Elemente der gewählten Zeile (Spalte) mit ihren zugehörigen Unterdeterminanten multipliziert und die Produkte summiert.
Dabei bekommt jedes Produkt aus Element und Unterdeterminante das Vorzeichen, das sich aus der Position des Elements in folgendem Schema ergibt:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Allgemein führt dies zu folgender Darstellung:

$$\det(A) = \sum_{i,k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik} \cdot A_{ik}$$

Fall 1: Format 2 x 2

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Fall 2: Format 3 x 3

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} \begin{array}{l} a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 \\ -a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_2 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 \end{array}$$

Determinantensätze

Satz 1: **Eine Determinante kann man transponieren, d.h. Zeilen und Spalten vertauschen, ohne dass sich ihr Wert ändert.**

$$\boxed{\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T)}$$

Satz 2: **Vertauscht man zwei Zeilen oder Spalten einer Determinante, so wechselt die Determinante das Vorzeichen.**

$$\boxed{\text{Det}(\ldots, a_i, \ldots, a_k, \ldots) = -\,\text{Det}(\ldots, a_k, \ldots, a_i, \ldots)}$$

Satz 3: **Wenn eine Spalte oder Zeile einer Determinante nur aus Nullen besteht, hat die Determinante den Wert Null.**

$$\boxed{\text{Det}(\ldots, a_i, \ldots, 0, \ldots) = 0}$$

Satz 4: **Wenn zwei Spalten oder Zeilen einer Determinante einander proportional sind ($k \in \mathfrak{R}$), hat die Determinante den Wert Null.**

$$\boxed{\text{Det}(\ldots, a_i, \ldots, ka_i, \ldots) = 0}$$

Anmerkung: **Eine Determinante nimmt dann den Wert 0 an, wenn die Zeilen oder Spalten linear abhängig sind.**

Satz 5: **Man multipliziert eine Determinante mit einer Zahl $k \in \mathfrak{R}$, indem man die Elemente einer Spalte oder Zeile mit der Zahl multipliziert. Dadurch multipliziert sich der Wert der Determinante mit k.**

$$\boxed{\text{Det}(a_1, \ldots, ka_i, \ldots, a_n) = k\,\text{Det}(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}$$

Satz 6: **Man addiert zwei Determinanten, die sich nur in den Elementen einer Zeile oder Spalte unterscheiden, indem man die Elemente dieser Zeilen oder Spalten addiert und die übrigen beibehält.**

Anmerkung: Natürlich gilt dieser Vorgang auch umgekehrt:

$$\boxed{\text{Det}(\ldots, a_i + b_i, \ldots) = \text{Det}(\ldots, a_i, \ldots) + \text{Det}(\ldots, b_i, \ldots)}$$

Aber: $\text{Det}(A + B) \neq \text{Det}(A) + \text{Det}(B)$

Satz 7: **Addiert man zu den Elementen einer Zeile oder Spalte ein beliebiges Vielfaches der Elemente einer anderen (Wichtig: $i \neq j$) Zeile oder Spalte, so ändert sich der Wert der Determinante nicht.**

$$\boxed{\text{Det}(\ldots, a_i + ka_j, \ldots) = \text{Det}(\ldots, a_i, \ldots)}$$

Satz 8: **Der Wert einer Determinante, bei der oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, ist gleich dem Produkt der Elemente in der Hauptdiagonalen. Daraus resultiert folgender Sonderfall:**

$$\boxed{\text{Det}(E) = 1}$$

Satz 9:

$$\boxed{\text{Det}(ka_1, \dots, ka_i, \dots, ka_n) = k^n \,\text{Det}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}$$

Satz 10:

$$\boxed{\text{Det}(A * B) = \text{Det}(A) * \text{Det}(B)}$$

Satz 11:

$$\boxed{\text{Det}(A^{-1}) = {}^{1}/_{\text{Det}(A)}}$$

(4) Invertierung von Matrizen / Ermittlung der inversen Matrix: A^{-1} :

Voraussetzungen: **1.)** **Ausgangsmatrix muss quadratisch sein.**

2.) $Det(A) \neq 0$

Option 1: **Verfahren über die adjungierte Matrix**

(1) **Unterdeterminanten für die jeweiligen Positionen bilden**

(2) **Transponieren der Matrix**

(3) **Vorzeichenschema entspr. der Laplace-Entwicklung anwenden**

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(4) **Ergebnis-Matrix mit Kehrwert der Determinante multiplizieren**

Option 2: **Gauß-Verfahren**

$$\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline \text{Lösen} & \text{des LGS} \\ \text{mittels} & \text{Gauß} \\ \hline E & A^{-1} \end{array}$$

Rechengesetze

(1) **Distributivgesetz:** $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

(2) **Assoziativgesetz:** $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

(3) **Kommutativgesetz gilt im Allgemeinen nicht:** $A\cdot B \neq B\cdot A$

Ausnahmen: **(i)** $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$

(ii) $A\cdot E = E\cdot A = A$