Anwendungsgebiete der Matrizen- und Determinantenrechnung (Auswahl)

Lineare Gleichungssysteme

$$o.B.d.A.: \quad n=3$$

Inhomogenes LGS: $A\cdot\vec{x} = \vec{b}$ oder $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Homogenes LGS: $A\cdot\vec{x} = \vec{0}$ oder $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösungsverfahren:

(1) Additionsverfahren

(2) Einsetzungsverfahren

(3) Gleichsetzungsverfahren

(4) Graphische Lösung

(5) ***Cramer-Regel***

Cramer-Regel:

Lösung von LGS der Form $A\cdot\vec{x} = \vec{b}$ durch $x_i = \frac{D_i}{D} \quad mit\ i=1,2,\ldots,n$

wobei $D = Det(A)$ und bei D_i die i-te Spalte der Matrix A durch $\vec{b}$ ersetzt wird.

(6) **Gauß-Verfahren**

Gauß-(Eliminations-)Verfahren:

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $\left(A \mid \vec{b}\right)$ wird durch elementare Äquivalenzumformungen der Zeilen in die Matrix $\left(E \mid \vec{b}^{*}\right)$.

Anstelle der Matrix E genügt auch eine Matrix in Dreiecks- oder Stufenform.

Mögliche Umformungsschritte:

(1) Vertauschen der Gleichungs- bzw. Zeilen-Reihenfolge

(2) Multiplikation einer Gleichung bzw. Zeile mit einer Zahl $c \in \Re \setminus \{0\}$

(3) Ersetzen einer Gleichung / Zeile durch die Summe aus ihr und dem Vielfachen einer anderen (Addition/Subtraktion des Vielfachen einer anderen Gleichung / Zeile mit derjenigen, die verändert werden soll)

Ökonomische Anwendungen zur Materialverflechtung und Kostenberechnung

(1) Materialverflechtungen: $M_{RZ} \cdot M_{ZE} = M_{RE}$

(2) Kostenberechnung (gesamt): $\vec{k}_{gesamt} = \vec{k}_R \cdot M_{RE} + \vec{k}_Z \cdot M_{ZE} + \vec{k}_E$

(3) Rohstoffkosten: $\vec{k}_{Rohstoffe} = \vec{k}_R \cdot M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \vec{k}_R \cdot M_{RE}$

(4) Fertigungskosten (Z): $\vec{k}_{Fertigung(Z)} = \vec{k}_Z \cdot M_{ZE}$

(5) Fertigungskosten (E): $\vec{k}_{Fertigung(Z)} = \vec{k}_E$

Das Leontief-Modell

Inputmatrix A bzw. technologische Matrix T aus der Input-Output-Tabelle

(1) $T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x}$

(2) $\vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} = (E-T) \cdot \vec{x}$

(3) $\vec{x} = (E-T)^{-1} \cdot \vec{y}$ mit Leontief-Inverse $(E-T)^{-1}$

Produktionsvektor $\vec{x}$ geben.
Wir wissen, dass sich der Produktionsvektor wie folgt berechnet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix}$$

und durch etwas Umformung erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix A}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

und jetzt den letzten Term noch etwas umgeformt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = T \cdot \vec{x} + \vec{y}$$

Die Matrix T heißt ***technologische Matrix*** oder ***Input-Matrix***. Sie gibt den für den Produktionsprozess notwendigen Input an. Die Koeffizienten von T werden auch als ***Produktionskoeffizienten*** bezeichnet.
Die Elemente der Matrix T geben an, wie viele Einheiten von einem Sektor für jede Einheit eines anderen Sektors bereitzustellen sind, damit der wechselseitige Bedarf gedeckt wird.

Lineare Optimierung

Lösung eines Maximierungsproblems mittels regulärer Simplexmethode bzw. mit dem Simplexalgorithmus

(1) Aufstellen des linearen Ungleichungssystems aus m Ungleichungen mit n Problemvariablen (= Nebenbedingungen) und der Zielfunktion

(2) Umformung des linearen Ungleichungssystems in ein lineares Gleichungssystem durch Einführung je einer Schlupfvariablen (Basisvariablen) pro Ungleichung

(3) Erstellung eines Tableaus (LGS aus Nebenbedingungen und Zielfunktion) mit Hilfe der Koeffizienten der Variablen

(4) Pivot-Spalte mittels *größtem* Koeffizient in der Zielfunktion ermitteln, dann mit der Spalte die Zeile mit dem größten Engpass (d.h. kleinster positiver Quotient aus Ergebnisspalte und Koeffizienten der Pivot-Spalte) anhand der Restriktionen berechnen (=> Pivot-Zeile)
Anmerkung: Sind mehrere Koeffizienten gleich groß, dann kann einer frei gewählt werden.

(5) Pivot-Element bestimmen (Kombination aus Pivot-Spalte und Pivot-Zeile)

(6) Pivot-Element mittels Gauß-Verfahren zu 1 umformen

(7) Alle anderen Elemente in der Pivot-Spalte mittels Gauß-Verfahren zu 0 umformen

(8) Mit dem nächsten *größten negativen* Koeffizient der Zielfunktion fortsetzen und das Verfahren wie bisher wiederholen

(9) Ist kein Wert der Zielfunktion mehr positiv, dann ist die Lösung optimal

Sollte ein Minimierungsproblem vorliegen, dann muss dies per Dualisierung in ein Maximierungsproblem umgewandelt werden, damit das Verfahren anwendbar ist.