

Abiturprüfung 2018

Mathematik

Aufgabe 1: Analysis (zentral – WTR)

Ministerium für Bildung Rheinland-Pfalz
Abiturprüfung, Mittwoch, 02.05.2018

Material für Schülerinnen und Schüler
Mathematik Analysis / WTR

NAME:

VORNAME:

WTR – Aufgabe

Abbildung 1 zeigt schematisch drei Bahnen, auf denen sich eine Kugel beim Kugelstoßen bewegen kann. Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 m in der Realität; die x-Achse beschreibt den horizontal verlaufenden Boden. Die Kugel soll als punktförmig angenommen werden.

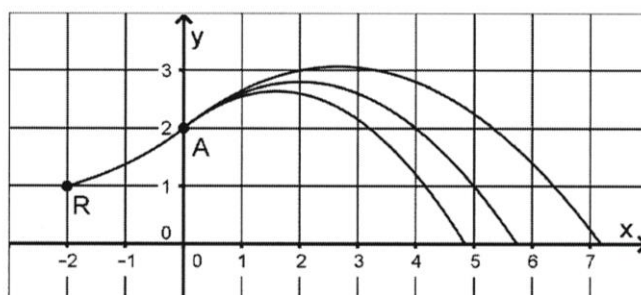


Abb. 1

Die Kugel wird aus der Ruhelage (R) beschleunigt, bis sie im Abstoßpunkt (A) die Hand der Athletin verlässt. Die anschließende Flugkurve der Kugel ist abhängig von ihrer Geschwindigkeit beim Abstoßen. Damit verändert sich insbesondere die Stoßweite s , d. h. der horizontale Abstand zwischen Abstoßpunkt und Auftreffpunkt auf dem Boden.

Die Bahn der Kugel von der Ruhelage bis zum Abstoßpunkt kann durch eine Funktion f mit

$$f(x) = r + s \cdot e^{0,5x} ; x \in [-2; 0]$$

beschrieben werden.

- a Bestimmen Sie die Werte der Parameter r und s so, dass der Graph dieser Funktion durch die Punkte $R(-2|1)$ und $A(0|2)$ verläuft.

Runden Sie Ihre Ergebnisse hierbei auf 2 Nachkommastellen.

Verwenden Sie im Folgenden die Funktion f mit $f(x) = 0,4 + 1,6 \cdot e^{0,5x} ; x \in [-2; 0]$.

- b Berechnen Sie die Stelle, an der sich die Kugel auf ihrer Bahn zwischen R und A auf einer Höhe von 1,50 m über dem Boden befindet.
- c Zwischen R und A wurde die Höhe der Kugel über dem Boden an fünf Stellen gemessen. Diese fünf Stellen werden im Modell durch die x -Werte x_1 bis x_5 dargestellt, die gemessenen Höhen werden mit h_1 bis h_5 bezeichnet. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Abiturprüfung 2018**Mathematik**Ministerium für Bildung Rheinland-Pfalz
Abiturprüfung, Mittwoch, 02.05.2018Material für Schülerinnen und Schüler
Mathematik Analysis / WTR

NAME:

VORNAME:

„Wenn der Wert des Terms $\left| \sum_{i=1}^5 (h_i - f(x_i)) \right|$ klein ist, dann werden die gemessenen Höhen durch die Werte $f(x_i)$, die das Modell liefert, gut beschrieben.“

Nach dem Abstoßen der Kugel lässt sich jede mögliche Flugkurve mithilfe einer der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen p_a mit $p_a(x) = -ax^2 + bx + 2$ und $a \in \mathbb{R}^+$ beschreiben.

Alle möglichen Bahnen der Kugel weisen im Abstoßpunkt keinen Knick auf.

d Ermitteln Sie den Wert von b . (zur Kontrolle: $b = 0,8$)

e Bei der Flugkurve zu $a = 0,1$ beträgt die Stoßweite 10 m. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Kugel auf den Boden auftrifft.

f Zeigen Sie, dass $\left(\frac{0,4}{a} \mid 2 + \frac{0,16}{a}\right)$ Hochpunkt des Graphen von p_a ist.

g Es gibt eine Gerade, auf der die Hochpunkte aller Graphen von p_a liegen. Berechnen Sie die Steigung dieser Geraden.

Der Zusammenhang zwischen den Werten von a und den Stoßweiten s mit $s > 0$ lässt sich durch die Gleichung $a = \frac{0,8}{s} + \frac{2}{s^2}$ darstellen.

h Leiten Sie diese Gleichung her.

i Bei einem Stoß beträgt die Stoßweite 20 m. Berechnen Sie die maximale Höhe der Kugel.

j Abbildung 2 (siehe Anlage) stellt den Zusammenhang zwischen den Werten von a und den Stoßweiten s graphisch dar. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

„Unterscheiden sich die Weiten zweier Stöße um 2 m, so ist der zur größeren Weite gehörende Wert von a halb so groß wie der zur kleineren Weite gehörende Wert von a .“

k Zeichnen Sie in Abbildung 2 (siehe Anlage) die beiden Parallelen zur s -Achse ein, die durch die Punkte $(2 \mid 0,9)$ und $(10 \mid 0,1)$ verlaufen. Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph mit der a -Achse und den beiden eingezeichneten Parallelen einschließt.

Abiturprüfung 2018

Mathematik

Ministerium für Bildung Rheinland-Pfalz
Abiturprüfung, Mittwoch, 02.05.2018

Material für Schülerinnen und Schüler
Mathematik Analysis / WTR

NAME:

VORNAME:

Anlage

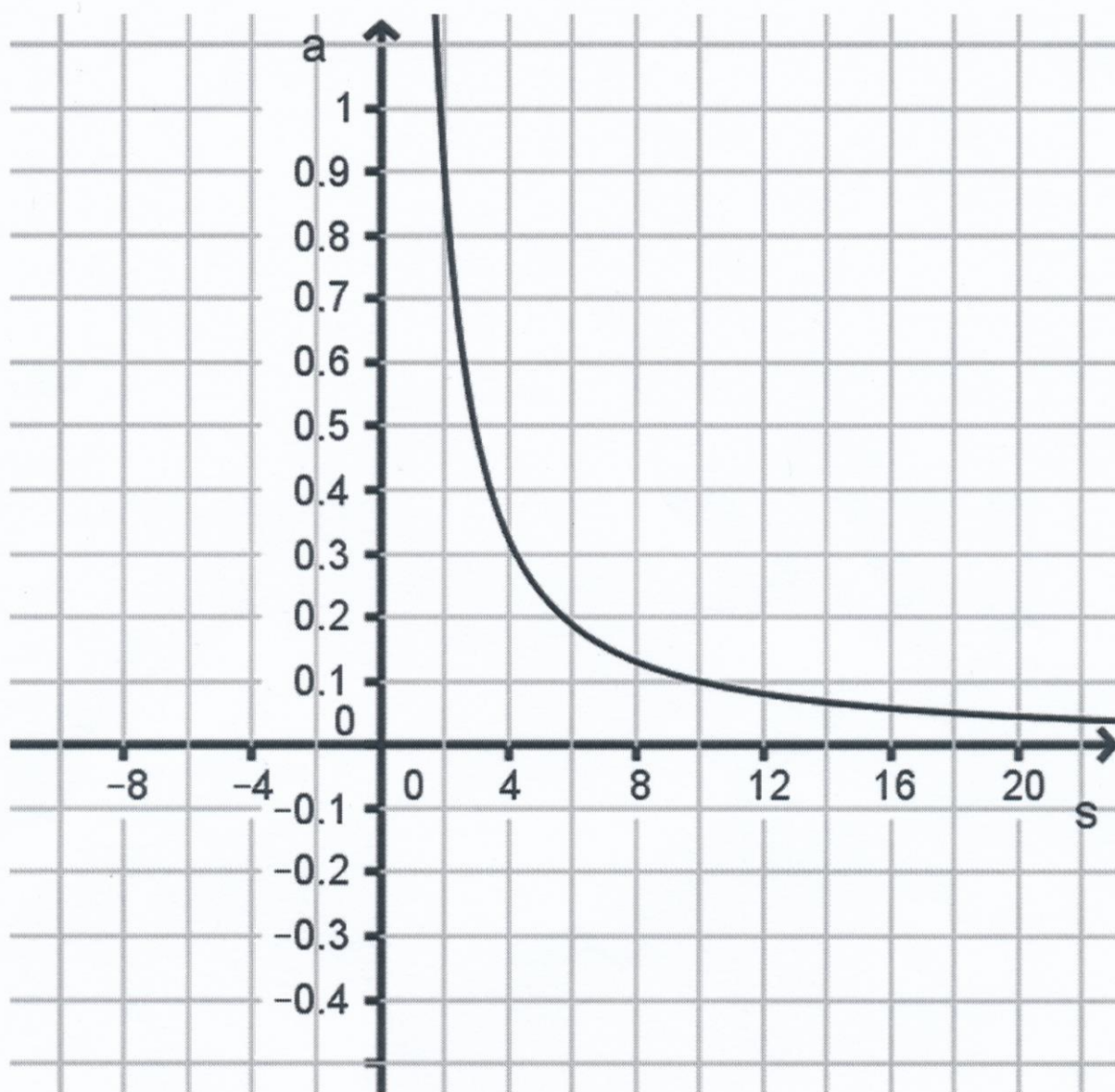


Abb. 2

Abiturprüfung 2018

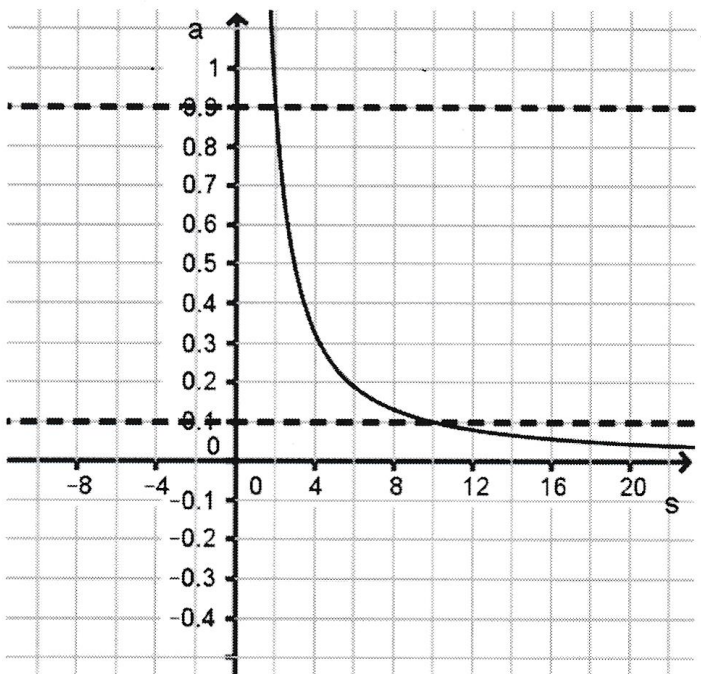
Mathematik

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte, korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	$\begin{cases} r + s \cdot e^{-1} = 1 \\ r + s = 2 \end{cases}$ ergibt $r = 1 - \frac{1}{e-1} \approx 0,42$; $s = \frac{e}{e-1} \approx 1,58$	3
b	$f(x) = 1,5 \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln\left(\frac{1,1}{1,6}\right) \approx -0,75$	2
c	Die Aussage ist falsch. Begründung: Die Werte von $h_i - f(x_i)$ können sich zumindest teilweise gegenseitig aufheben, wenn sie unterschiedliche Vorzeichen haben.	3
d	Mit $p'_a(x) = -2ax + b$ und $f'(x) = 0,8 \cdot e^{0,5x}$ ergibt sich: $p'_a(0) = f'(0) \Leftrightarrow b = 0,8$	4
e	$\tan \varphi = p'_{0,1}(10) = -1,2$, d. h. $\varphi \approx -50^\circ$ Die Kugel trifft unter einem Winkel mit einer Größe von etwa 50° auf.	3
f	Der Graph von p_a ist eine nach unten geöffnete Parabel und es gilt: $p'_a\left(\frac{0,4}{a}\right) = -2 \cdot a \cdot \frac{0,4}{a} + 0,8 = 0$, $p_a\left(\frac{0,4}{a}\right) = -a \cdot \left(\frac{0,4}{a}\right)^2 + 0,8 \cdot \frac{0,4}{a} + 2 = 2 + \frac{0,16}{a}$	4
g	Z. B. für $a = 1$ ergibt sich der Hochpunkt $(0,4 \mid 2,16)$, für $a = 2$ $(0,2 \mid 2,08)$. Steigung der Gerade: $\frac{2,16-2,08}{0,4-0,2} = 0,4$	3
h	$p_a(s) = 0 \Leftrightarrow a \cdot s^2 = 0,8s + 2 \Leftrightarrow a = \frac{0,8}{s} + \frac{2}{s^2}$	3
i	Für $s = 20$ ist $a = \frac{0,8}{20} + \frac{2}{20^2} = 0,045$	4

Abiturprüfung 2018

Mathematik

	Damit: $2 + \frac{0,16}{0,045} \approx 5,6$ Die Höhe der Flugkurve beträgt etwa 5,6 m.	
j	Die Aussage ist falsch. Für $s = 10$ ist $a = 0,1$, für $s = 12$ weicht der Wert von a mit etwa 0,08 deutlich von der Hälfte von 0,1 ab.	2
k	Für $s = 2$ ergibt sich $a = 0,9$, für $s = 10$ ist $a = 0,1$.  $2 \cdot 0,9 + \int_2^{10} \left(\frac{0,8}{s} + \frac{2}{s^2} \right) ds - 10 \cdot 0,1 = 0,8 + \left[0,8 \cdot \ln s - \frac{2}{s} \right]_2^{10} =$ $= 0,8 + \left(0,8 \cdot \ln 10 - \frac{2}{10} - 0,8 \cdot \ln 2 + \frac{2}{2} \right) \approx 2,9$	5
		36