Ln-Funktionen

A1: $f_t(x) = \ln\left(\frac{1}{4}x^2 + t\right) \quad mit\ t > 0$

Gemeinsame Punkte mit Abszisse; Extrema und Wendepunkte; Ortskurve der Wendepunkte;

Für welchen Wert von t, geht die Wendetangente durch den Ursprung;

Für $t_1 = 0{,}5$ und $t_2 = 0{,}5e$ entsteht bei Rotation um die y-Achse ein Drehkörper; dieser wird durch Ebenen senkrecht zur Ordinate geschnitten.

Beschreiben Sie die Formen der dabei entstehenden Schnittflächen und bestimmen Sie deren Inhalt.

A2: $f_t(x) = \frac{1}{x} \cdot (t + \ln x) \quad mit\ t > 0$ Das zugehörige Schaubild ist K_t

Schnittpunkte mit x-Achse; Extrema und Wendepunkte; Asymptoten & Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs;

Ortskurve der Extrema;

Stammfunktion bestimmen

Die Kurve K_t, die x-Achse und die zur y-Achse parallele Gerade durch den Hochpunkt von K_t umschließen eine Fläche => Inhalt?

Inhalt der Funktion im I. Quadranten mit der x-Achse für $\lim_{k \to \infty} \int_{0,1}^{k} f_t(x)\,dx$

Bestimmen der durchschnittlichen Funktionswerte im Bereich]1 ; 10]

Tangente an der Stelle x = 8 und Schnittstelle mit x-Achse bzw. Schnittstelle mit y = 0,1

Lösung zu A2:

$f_t(x) = \frac{1}{x}(t + \ln x) \qquad t > 0 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

NS: $\frac{1}{x} \neq 0$ und $t + \ln x = 0 \quad |-t$

$\ln x = -t \quad | e$

$x = \frac{1}{e^t} = e^{-t}$

Extrema:

$f_t'(x) = -\frac{1}{x^2}(t + \ln x) + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(1 - t - \ln x) \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \neq 0$ und $1 - t - \ln x = 0 \quad | + \ln x$

$1 - t = \ln x \quad | e$

$\frac{e}{e^t} \rightarrow e^{1-t} = x$

$f_t(e^{1-t}) = \frac{1}{e^{1-t}}(t + 1 - t) = \frac{1}{e^{1-t}}$

$f_t''(x) = -\frac{2}{x^3}(1 - t - \ln x) + \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x}\right)$

$f_t''(x) = -\frac{1}{x^3}(3 - 2t - 2\ln x)$

$f_t''(e^{1-t}) = -\frac{1}{e^{3-3t}}(3 - 2t - 2 + 2t) = -\frac{1}{e^{3-3t}} < 0$

$\Rightarrow$ MAX $\left(e^{1-t} / \frac{1}{e^{1-t}}\right)$

Ortskurve: $t = 1 - \ln x \rightarrow y = \frac{1}{e^{1-1+\ln}} = \frac{1}{x}$

Grenzwerte:

$$\lim_{x \to 0^+} f_t(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \infty} \cdot \underbrace{(t + \ln x)}_{-\infty} \longrightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f_t(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{t + \ln x}{x} \underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \longrightarrow 0$$

Stammfunktion

$$\int \frac{1}{x}(t + \ln x)\,dx = t\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x} \ln x\,dx$$

$$= t \cdot \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

NR

$$u = \ln x \qquad v = \ln x$$

$$u' = \frac{1}{x} \qquad v' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x} \ln x\,dx = (\ln x)^2 - \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx \qquad \Big| + \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$2\int \frac{1}{x} \ln x\,dx = (\ln x)^2$$

$$\int \frac{1}{x} \ln x\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_{0,1}^{b} f_t(x) = \lim_{b\to\infty} \left[t \cdot \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_{0,1}^{b} \quad \to \infty$$

Durchschnittlicher Funktionswert $]1;10]$

$$m = \frac{1}{10-1} \int_{1}^{10} f_t(x)\, dx$$

$$m = \frac{1}{9} \left[t \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_{1}^{10} = \frac{1}{9} \left\{ \left[t \ln 10 + \frac{1}{2}(\ln 10)^2 \right] - 0 \right\}$$

$$m = \frac{1}{9} \left[t \ln 10 + \frac{1}{2}(\ln 10)^2 \right] \approx \frac{1}{9}(2{,}3\, t + 2{,}65)$$

Fläche Kurve

$$\int_{NS}^{Extrem} f_t(x)\, dx = \left[t \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_{\frac{1}{e^t} = e^{-t}}^{e^{1-t} = \frac{e}{e^t}}$$

$$= \left[t(1-t) + \frac{1}{2}(1-t)^2 \right] - \left[t(-t) + \frac{1}{2}(-t)^2 \right]$$

$$= t - t^2 + \frac{1}{2} - t + \frac{1}{2}t^2 + t^2 - \frac{1}{2}t^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

e-Funktionen

A1: $f_k(x) = 4(x-k)e^{-0,5x}$

Extrema; Wendepunkt; Grenzwert an den Rändern des Def.-Bereichs; Schnittstellen mit y = 1; Durchschnittlicher Funktionswert; Tangente in x = 10

A2: $f_k(x) = e^{kx} \quad mit\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ C_k ist das Schaubild von f_k

Kurventangente und Kurvennormale im Schnittpunkt P mit der y-Achse

Welche Beziehung muss für k_1 und k_2 gelten, damit sich die Schaubilder orthogonal schneiden?

Tangente und Normale von C_k im Punkt P sowie die x-Achse begrenzen ein Dreieck. Flächeninhalt? Für welchen Wert von k wird die Fläche extremal? Um welche Art von Extremum handelt es sich?

Gerade x = u ($u < -\frac{1}{k} \quad mit\ k > 0$), die x-Achse, das Schaubild C_k und seine Tangente in P begrenzen eine Fläche. Inhalt? Grenzwert $u \to -\infty$?

$g_k(x)$ mit k>0 ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades mit

$g_k(0) = f_k(0),\ g_k{}'(0) = f_k{}'(0)\ und\ g_k{}''(0) = f_k{}''(0)$

Bestimmen von $g_k(x)$ und den Tiefpunkt der Funktion.

Geometrischer Ort aller Tiefpunkte von $g_k(x)$?

A3: 1. und 2. Ableitung und Stammfunktionen bestimmen:

$f_k(x) = e - e^{kx} \quad mit\ k \in \mathbb{R}^+$

$f_k(x) = k - ke^{-x} \quad mit\ k \in \mathbb{R}^+$

$f(x) = 3xe^{-0,5x^2}$

$f(x) = 3xe^{-0,5x}$

$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

Trigonometrische Funktionen

A1: 1. und 2. Ableitung und Stammfunktionen bestimmen:

$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) \quad mit\ x \in [0\,;6]$

$f_u(x) = u \cdot \cos x - u^2 \quad mit\ x \in [-\pi\,;\pi] \quad und \quad u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f_u(x) = u \cdot (\cos x)^2 - x^2 \quad mit\ x \in [-\pi\,;\pi] \quad und \quad u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f_u(x) = \frac{4}{u} \cdot \tan x \quad mit\ x \in [-\pi\,;\pi]\, und\ u > 0$

Lösungen zu A1:

$f_k(x) = k\cos^2(x) - x^2 \qquad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Nullstellen: $k\cos^2(x) = x^2$ (3. Binom)

$\sqrt{k}\cos x - x = 0$ und $\sqrt{k}\cos x + x = 0$

grafische Lösung $\cos x = x$ und $\cos x = -x$

numerische Lösung

Extrema:

$f_k'(x) = 2k\cos x \cdot (-\sin x) - 2x = 0$

$-k\cos x \cdot \sin x = x$

$k \in]-1;\infty[\Rightarrow$ 1 Extremum bei $x = 0$

$k \in]-\infty;-1[\Rightarrow$ 3 Extrema

$k = -1$: WP

$g_k(x) = k\cos x - k^2$

NS: $\cos x = k \rightarrow \arccos$ (!) oder grafisch

für $k \in [-1;1]$

Extrema: $g_k'(x) = -k\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$

$h_k(x) = \frac{4}{k}\tan(x) \qquad k > 0$

A2: $f_u(x) = 1 + u \cdot \sin x \quad mit\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right] \quad und \quad u \in \mathbb{R}^+$

Schnittpunkte mit Koordinatenachsen

Extrema- und Wendepunkte

Gegeben: $y = \frac{1}{u \cdot \pi} x^2 - \frac{1}{u} x + 1$ Zeigen: K_u und C_u schneiden sich auf der Geraden y = 1

orthogonal

Kurven K_u und C_u begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A(u). u bestimmen, damit A(u) ein Extremum wird.

Welche Art von Extremum liegt vor?

$f_k(x) = 1 + k \cdot \sin x \qquad k > 0$

$f'_k(x) = k \cdot \cos(x) = 0 \leadsto \cos(x) = 0 \leadsto x = p \cdot \frac{\pi}{2}$

mit $p \in 2n+1$

$y_k = \frac{1}{k\pi} x^2 - \frac{1}{k} x + 1$

$y_k = f_k(x) \Rightarrow \frac{1}{k\pi} x^2 - \frac{1}{k} x + 1 = k \cdot \sin x + 1 \overset{!}{=} 1 \qquad \begin{array}{|l} -1 \\ \cdot k \end{array}$

$\frac{1}{\pi} x^2 - x = k^2 \sin x = 0$

$\left(\frac{1}{\pi}x - 1\right)x = 0 \rightsquigarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \pi$

$k^2 \sin x = 0 \rightsquigarrow \sin x = 0 \rightsquigarrow x = k \cdot \pi$

$\Rightarrow$ Schnittpunkte bei $P_1(0/1)$ und $P_2(\pi/1)$

Fläche zwischen K und C

$\downarrow \quad \downarrow$

$f_k \quad y_k$

$$A(k) = \int_0^\pi (f_k(x) - y_k)\,dx = \int_0^\pi \left(1 + k\sin x - \frac{1}{k\pi}x^2 + \frac{1}{k}x - 1\right)dx$$

$$= \int_0^\pi \left(k \sin x - \frac{1}{k\pi}x^2 + \frac{1}{k}x\right)dx$$

$$= \left[-k\cos x - \frac{1}{3k\pi}x^3 + \frac{1}{2k}x^2\right]_0^\pi$$

$$= \left(k - \frac{\pi^2}{3k} + \frac{\pi^2}{2k}\right) - (-k - 0 + 0)$$

$$= 2k + \frac{\pi^2}{6k}$$

$$A'(k) = 2 - \frac{\pi^2}{6k^2} = 0 \rightsquigarrow k^2 = \frac{1}{12}\pi^2$$

$$|k| = \frac{1}{\sqrt{12}}\pi = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

$$A''(k) = \frac{\pi^2}{2k^3} > 0 \Rightarrow \text{MIN}$$

A3: $f(x) = e^{\sin x} \quad mit\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$

Nullstellen; Extrema; Wendestellen; Graph der Funktion

$f(x) = e^{\sin(x)}$

NS: $e^{\sin x} = 0$ ↯

S_y: $e^{\sin 0} = e^0 = 1$

Extrema: $f'(x) = \underbrace{e^{\sin x}}_{\neq 0} \cdot \cos x = 0$

$\cos x = 0 \leadsto x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ mit $k = 2n+1$

$f''(x) = e^{\sin x} \cdot \cos^2 x + e^{\sin x} \cdot (-\sin(x))$

$f''(x) = e^{\sin x} \left(\cos^2 x - \sin x\right)$

$f''(\frac{\pi}{2}) = e \cdot (-1) < 0 \Rightarrow Max\left(\frac{\pi}{2} / e\right)$

Wendestellen:

$f''(x) = \underbrace{e^{\sin x}}_{\neq 0} \left(\cos^2 x - \sin x\right) \overset{!}{=} 0$

$\cos^2 x - \sin x = 0$

$1 - \sin^2 x - \sin x = 0$

$\Rightarrow -\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$

$-u^2 - u + 1 = 0$

$u^2 + u - 1 = 0$

$u_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \overset{!}{=} \sin x$

$x_1 \approx -3{,}81 \quad x_2 \approx 0{,}67 \quad x_3 \approx 2{,}48$

Ganz- & Gebrochen-rationale Funktionen / Kurvenscharen

$f_t(x) = \frac{2x+t}{x^2} \quad mit\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Das zugehörige Schaubild ist K_t

Definitionsbereich; Schnittpunkte mit Koordinatenachsen; Extrema und Wendepunkte; Asymptoten; Polstellen/Unstetigkeitsstellen; Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs;

Zeigen: Abszissenwert des Extremums von K_t ist arithmetisches Mittel der Abszissenwerte von Schnittpunkt mit x-Achse und des Wendepunktes;

Zeigen: Zu jedem Punkt P auf K_t gibt es einen Punkt Q auf K_{-t}, der bezüglich des Ursprungs punktsymmetrisch ist

Für t<0 schließen K_t, die x-Achse und die Gerade mit x = z (z > -0,5t) eine Fläche ein; berechnen des Flächeninhaltes A(z)

Wie gestaltet sich die Fläche für $z \to \infty$?

Sei nun folgende Funktion gegeben:

$$g_{s;t}(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 1 \\ \frac{sx+t}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad mit\ s;t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Bestimmen der Werte s und t für g*(x) derart, dass die Funktion stetig und differenzierbar ist

Zeichnen der Funktion

Für $x \geq -1$ ist die Funktion G durch $G(x) = \int_{-1}^{x} g^*(\tau)\, d\tau$ definiert; gesucht ist die Darstellung von G(x) ohne Integralzeichen, d.h. die Integralfunktion

Lösungen im Rahmen des Intensivtages 😉