Arbeitsblatt 1: Differentialrechnung (VL)

Mathematik
Jürgen Meisel

1.) Bestimmen Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $$f(x) = 4x^3 - x^2 + 1$$

$$f'(x) = 12x^2 - 2x^1 + 1 \cdot 0 \cdot x^{-1} = 12x^2 - 2x^1$$

b) $$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = x + 1 - x^{-1}$$

$$f'(x) = 1 + 0 - (-1)x^{-2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

oder nach Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{(2x+1-0) \cdot x - (x^2 + x - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 + x - x^2 - x + 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

c) $$f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{4x} + x^2 \cdot e^{4x} \cdot 4 = e^{4x} \cdot (2x + 4x^2)$$

d) $$f(x) = \frac{e^{2x^3 - 4x + 1}}{x^2 + x}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x^3-4x+1} \cdot (6x^2 - 4) \cdot (x^2 + x) - e^{2x^3-4x+1} \cdot (2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x^3-4x+1} \cdot \left[(6x^2 - 4) \cdot (x^2 + x) - 2x - 1\right]}{(x^2+x)^2} = \frac{e^{2x^3-4x+1} \cdot (6x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 4x - 2x - 1)}{(x^2+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x^3-4x+1} \cdot (6x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 6x - 1)}{(x^2+x)^2}$$

2.) Untersuchen Sie die Funktion $f_k(x) \quad = \quad x^3 - kx^2 \quad mit \quad k > 0$

a)	Symmetrie	b)	Schnittstellen mit den Achsen
c)	Extrema	d)	Ortskurve der Extrema
e)	Wendepunkte	f)	Skizze für k = {1, 2, 3, 4}

g) Schnittpunkte mit der Funktion $f_k(x) \quad = \quad x$

Keine Symmetrie wegen gerader und ungerader Hochzahlen

Nullstellen

$$f_k(x) \quad = \quad x^3 - kx^2 \quad = \quad 0$$

$$f_k(x) \quad = \quad (x-k)x^2 \quad = \quad 0 \quad => \quad x_1 = k \quad und \quad x_2 = 0[doppelt]$$

y-Achsenabschnitt

$$f_k(0) \quad = \quad 0^3 - k \cdot 0^2 \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad S_y(0 \mid 0)$$

Extrema

$$f_k'(x) \quad = \quad 3x^2 - 2kx \quad = \quad 0$$

$$f_k'(x) \quad = \quad (3x-2k)x \quad = \quad 0 \quad => \quad x_1 = \frac{2}{3}k \quad und \quad x_2 = 0$$

$$f_k''(x) \quad = \quad 6x - 2k \quad => \quad f_k''(0) \quad = \quad -2k < 0 \quad => \quad Max(0 \mid 0)$$

$$=> \quad Min\left(\frac{2}{3}k \,\middle|\, -\frac{4}{27}k^3\right)$$

Ortskurve der Extrema:

$$\xrightarrow{\text{Extremwertstelle}} \quad x_1 = \frac{2}{3}k \quad und \quad x_2 = 0\,[Fixpunkt]$$

$$x_1 = \frac{2}{3}k \quad => \quad k \quad = \quad \frac{3}{2}x \quad \xrightarrow{\text{einsetzen in Funktion}} \quad y \quad = \quad x^3 - \frac{3}{2}x \cdot x^2 \quad = \quad -\frac{1}{2}x^3$$

Wendepunkt(e):

$$f_k''(x) \quad = \quad 6x - 2k \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{3}k$$

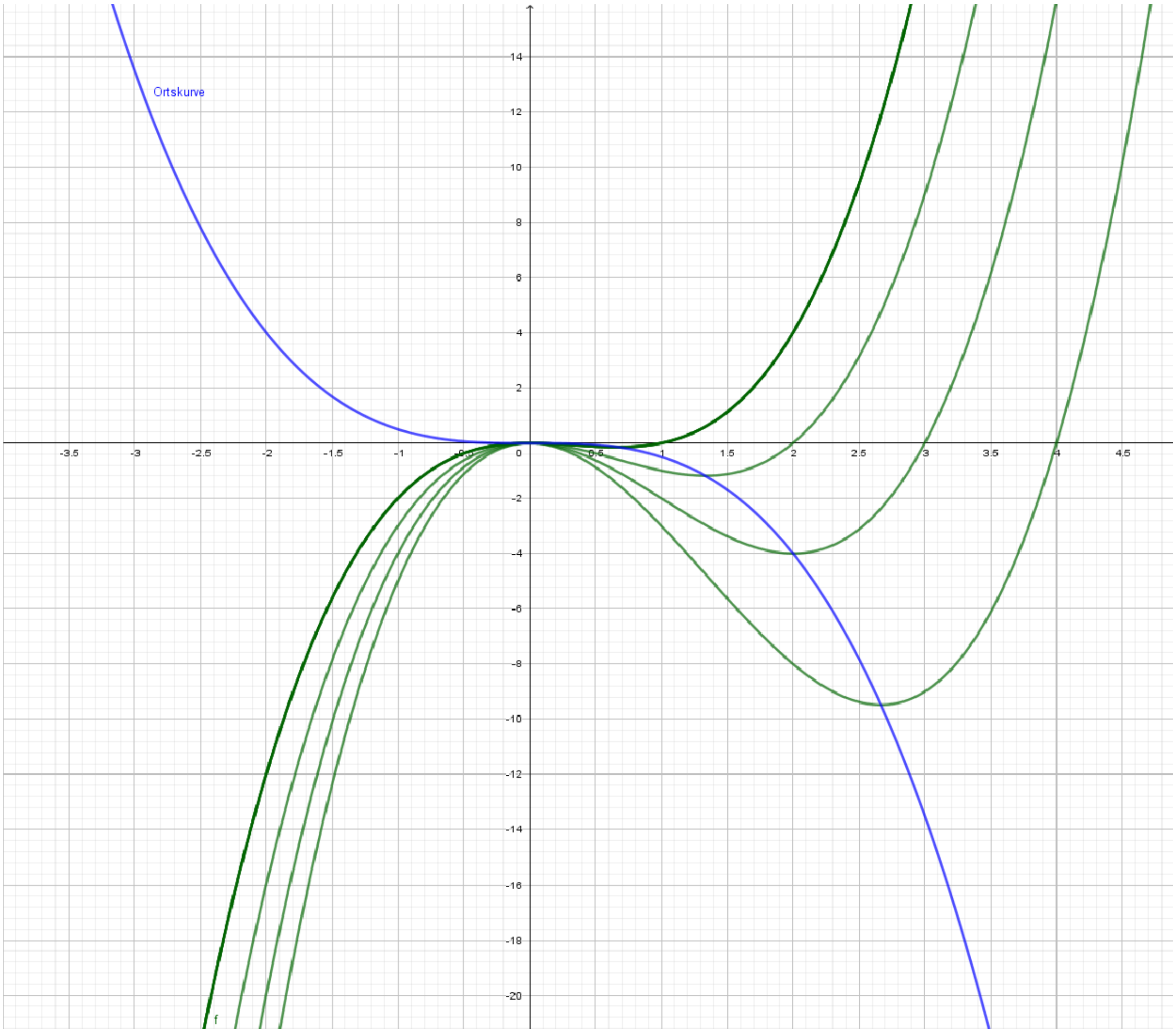
$$f_k'''(x) \quad = \quad 6 \quad \neq \quad 0 \quad \rightarrow \quad Min\left(\frac{1}{3}k \,\middle|\, -\frac{2}{27}k^3\right)$$

Schnittpunkte mit der Funktion $f_k(x) = x$

$$f_k(x) = x^3 - kx^2 = x \rightarrow x^3 - kx^2 - x = 0 \rightarrow x\left(x^2 - kx - 1\right) = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_{2/3} = \frac{k \pm \sqrt{k^2+4}}{2} \rightarrow \text{3 Schnittstellen}$$

Graph mit Variation von k:



Oder als animierter Graph in der Variation von k zwischen 1 bis 5: