Übungsblatt: Differentialrechnung

Mathematik
Jürgen Meisel

1.) Bestimmen Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x}$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$

d) f(x) = $4x^3 - 3x^2 + x + 2$

e) f(x) = $5x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

f) f(t) = $\frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} + 5$

g) f(x) = $x^4 * e^x$

h) f(x) = t^2

i) f(t) = $e^{2t} + e^{t^2} - e$

j) f(x) = $x^2 * e^x$

k) f(t) = $(x + 4)^3 (x^3 - 2t - 4)^4$

l) f(x) = $(x + 4)^3 (x^3 - 2t - 4)^4$

m) f(x) = $\sqrt{x^2 - 1}$

n) f(x) = $\sqrt[4]{x^2 - 1}$

o) f(x) = $(x^2 - 1) * \frac{1}{x^2}$

p) f(x) = $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} + e^2$

2.) Führen Sie eine Kurvendiskussion der Kurvenscharen $f_k(x)$ durch:

(i) $f_k(x) = \frac{4}{3}x^3 - kx^2 \quad mit\ k > 0$

(ii) $f_k(x) = \frac{1}{2}x^4 - kx^2 \quad mit\ k > 0$

a) Schnittstellen mit den Achsen

b) Extrema

c) Ortskurve der Extrema

d) Wendepunkte

e) Skizze für verschiedene k-Werte

3.) Ableitungen von besonderer Güte: die Exponentialfunktionen

a) f (x) = e^x

b) f (x) = a^x

c) f (x) = x^x

d) f (x) = a^{x^2}

e) f (x) = $a^{2x^4 - x^2}$

f) f (x) = $4x^{x^5 - 3x^4 - 1}$

4.) Fragestellungen zu ganzrationalen Funktionen mit Parameter

(i) Wie muss der Parameter k gewählt werden, damit die Funktion $f_k(x) = 4x^3 + kx^2$ einen Hochpunkt bei x = -1 besitzt?

(ii) Welche Ursprungsgerade ist Tangente an den Graphen von

a) $f(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad mit\ x > 0$?

b) $f(x) = \sqrt{x} - 1 \quad mit\ x > 0$?

(iii) Welche Tangente an den Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$ ist parallel zur Sehne durch die Punkte P(4 / 2) und Q(0 / 0)?

LÖSUNGEN

a) f (x) = $4x^3 - 3x^2 + x + 2$

b) f (x) = $5x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

c) f (t) = $\frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} + 5$

f) f (x) = $x^4 * e^x$

g) f (x) = t^2

l) f (t) = $e^{2t} + e^{t^2} - e$

p) f (x) = $x^2 * e^x$

q) f (t) = $(t^2 + x + 4)(x^3 - 2t - 4)$

r) f (x) = $(t^2 + x + 4)(x^3 - 2t - 4)$

t) f (x) = $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$

u) f (x) = $\sqrt{x^2 - 1}$

v) f (x) = $\sqrt[4]{x^2 - 1}$

y) f (x) = $(x^2 - 1) * \frac{1}{x^2}$

z) f (x) = $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} + e^2$

$a)\quad f(x)=4x^3-3x^2+x+2$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Summenregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=12x^2-6x+1$$

$b)\quad f(x)=5x^3-2x^2+3x+2$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Summenregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=15x^2-4x+3$$

$c)\quad f(t)=\frac{2}{t^3}-\frac{1}{t}+5$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Summenregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(t)=-\frac{6}{t^4}+\frac{1}{t^2}$$

$d)\quad f(x)=x^2\cdot\ln(x)$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=2x\cdot\ln(x)+\frac{x^2}{x}=x\left[2\cdot\ln(x)+1\right]$$

$e)\quad f(t)=\frac{\ln(t)}{t}=t^{-1}\cdot\ln(t)$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(t)=-t^{-2}\cdot\ln(t)+t^{-1}\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{t^2}\left[1-\ln(t)\right]$$

$f)\quad f(x)=x^4\cdot e^x$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=4x^3\cdot e^x+x^4\cdot e^x=x^3\cdot e^x\left[4+x\right]$$

$g)\quad f(x)=t^2$

$$\xrightarrow[\text{Potenzregel (aber: Hallo - wach!!! - Funktionsvartiable)}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=0$$

$h)\quad f(t)=\frac{e^t}{1-e^t}$

$$\xrightarrow[\text{Quotientenregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(t)=\frac{e^t\left(1-e^t\right)-e^t\left(-e^t\right)}{\left(1-e^t\right)^2}=\frac{e^t}{\left(1-e^t\right)^2}$$

$i)\quad f(x)=\ln\sqrt[3]{\frac{2x-1}{2x+1}}=\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$

$\xrightarrow[\text{Ketten-/Quotientenregel}]{\text{1. Ableitung:}}$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{2x-1}{2x+1}}\cdot\frac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x+1)^2}=\frac{4}{3(4x^2-1)}$$

$j)\quad f(x)=\ln\left(1-3x^2\right)$

$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=-\frac{6x}{1-3x^2}$

$k)\quad f(x)=(1-\ln x)^3$

$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=3(1-\ln x)^2\cdot\frac{-1}{x}=-\frac{3(1-\ln x)^2}{x}$

$l)\quad f(t)=e^{2t}+e^{t^2}-e$

$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(t)=2e^{2t}+2te^{t^2}$

$m)\quad f(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)$

$\xrightarrow[\text{Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+\frac{e^x}{2}(\cos x-\sin x)=e^x\cos x$

$n)\quad f(t)=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$

$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(t)=\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1+\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}\right)=\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$

$o)\quad f(x)=x^3+\ln x$

$\xrightarrow[\text{Potenzregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=3x^2+\frac{1}{x}$

$p)\quad f(x)=x^2e^x$

$$\xrightarrow[\text{Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} f'(x)=2xe^x+x^2e^x=xe^x(2+x)$$

$q)\quad f(t)=\left(t^2+x+4\right)\left(x^3-2t-4\right)$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Summen-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} f'(t)=2t\left(x^3-2t-4\right)-2\left(t^2+x+4\right)$$

$r)\quad f(x)=\left(t^2+x+4\right)\left(x^3-2t-4\right)$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Summen-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} f'(x)=1\cdot\left(x^3-2t-4\right)+3x^2\cdot\left(t^2+x+4\right)$$

$s)\quad f(x)=\ln\left(x^2+x\right)$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}} f'(x)=\frac{1}{x^2+x}\cdot(2x+1)$$

$t)\quad f(x)=\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$

$$\xrightarrow[\text{Quotienten-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}$$

$$f'(x)=\frac{2(1+x)(1-x)^2-2(1+x)^2(1-x)}{(1-x)^4}=-\frac{4x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$u)\quad f(x)=\sqrt{x^2-1}$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}} f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$v)\quad f(x)=\sqrt[4]{x^2-1}=\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{4}}$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}} f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\left(x^2-1\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2x=\frac{x}{2\cdot\sqrt[4]{\left(x^2-1\right)^3}}$$

w) $f(t)=\dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$

$\xrightarrow[]{\text{1. Ableitung: Quotienten-/Kettenregel}}$

$$f'(t)=\frac{2t\sqrt{1-t^2}-t^2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\cdot(-2t)}{1-t^2}=\frac{2t+\dfrac{t^3}{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$$

x) $f(x)=\dfrac{5}{1+e^{2-3x^3}}=5\cdot\left(1+e^{2-3x^3}\right)^{-1}$

$\xrightarrow[]{\text{1. Ableitung: Kettenregel}}$

$$f'(x)=-5\cdot\left(1+e^{2-3x^3}\right)^{-2}\cdot e^{2-3x^3}\cdot\left(-9x^2\right)=\frac{45x^2\cdot e^{2-3x^3}}{\left(1+e^{2-3x^3}\right)^2}$$

y) $f(x)=\left(x^2-1\right)\cdot\dfrac{1}{x^2}$

$\xrightarrow[]{\text{1. Ableitung: Produktregel}}$ $f'(x)=2x\cdot\dfrac{1}{x^2}+\left(x^2-1\right)\cdot\dfrac{(-2)}{x^3}=\dfrac{2}{x^3}$

z) $f(x)=\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}+e^2=x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+e^2$

$\xrightarrow[]{\text{1. Ableitung: Produktregel}}$ $f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

ä) $f(a)=\dfrac{a^2-4a+3}{-3a^2+12a-9}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\dfrac{a^2-4a+3}{a^2-4a+3}\quad\Rightarrow\quad f^*(a)=\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$\xrightarrow[]{\text{1. Ableitung: Potenzregel}}$ $f'(a)=0$

3.) Ableitungen von besonderer Güte: die Exponentialfunktionen

a) f (x) = e^x b) f (x) = a^x c) f (x) = x^x

d) f (x) = a^{x^2} e) f (x) = $a^{2x^4-x^2}$ f) f (x) = $4x^{x^5-3x^4-1}$

$$a)\quad f(x)=e^x \xrightarrow{\text{1. Ableitung:}} f'(t)=e^x$$

$$b)\quad f(x)=a^x \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}} f(x)=e^{\ln\left(a^x\right)}=e^{x\cdot\ln a}$$

$$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}} f'(x)=e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$$

$$c)\quad f(x)=x^x \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}} f(x)=e^{\ln\left(x^x\right)}=e^{x\cdot\ln x}$$

$$\xrightarrow[\text{Ketten-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} f'(x)=e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x\cdot(\ln x+1)$$

$$d)\quad f(x)=a^{x^2} \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}} f(x)=e^{\ln\left(a^{x^2}\right)}=e^{x^2\cdot\ln a}$$

$$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}} f'(x)=e^{x^2\cdot\ln a}\cdot 2x\ln a=a^{x^2}\cdot 2x\ln a$$

$$e)\quad f(x)=a^{2x^4-x^2} \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}}$$

$$f(x)=e^{\ln\left(a^{2x^4-x^2}\right)}=e^{\left(2x^4-x^2\right)\cdot\ln a} \xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}$$

$$f'(x)=e^{\left(2x^4-x^2\right)\cdot\ln a}\cdot\left(8x^3-2x\right)\ln a=a^{2x^4-x^2}\cdot 2x\cdot\left(4x^2-1\right)\ln a$$

$$f)\quad f(x)=x^{x^5-3x^4-1} \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}}$$

$$f(x)=e^{\ln\left(x^{x^5-3x^4-1}\right)}=e^{\left(x^5-3x^4-1\right)\cdot\ln x} \xrightarrow[\text{Ketten-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}}$$

$$f'(x)=e^{\left(x^5-3x^4-1\right)\cdot\ln x}\cdot\left[\left(5x^4-12x^3\right)\cdot\ln x+\left(x^5-3x^4-1\right)\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$f'(x)=x^{x^5-3x^4-1}\cdot\left[\left(5x^4-12x^3\right)\cdot\ln x+x^4-3x^3-\frac{1}{x}\right]$$