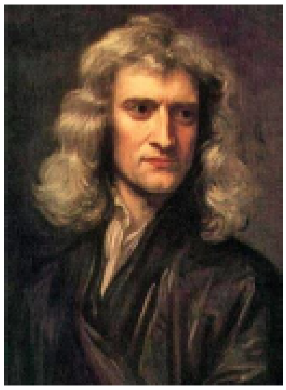
Anwendung der Differenzialrechnung: Das Verfahren von Newton - Raphson

Bei der Lösung mathematischer Probleme wird man besonders häufig mit der Aufgabe konfrontiert, Nullstellen bestimmen zu müssen. Die elementaren und exakten Standardverfahren (z.B „Mitternachtsformel" für quadratische Gleichungen) reichen oft nicht mehr aus, solche Probleme zu lösen. In solchen Fällen können rechnerische Näherungsverfahren angewendet werden, die zwar keine mathematisch genauen Lösungen aber oft sehr genaue Näherungen ergeben.

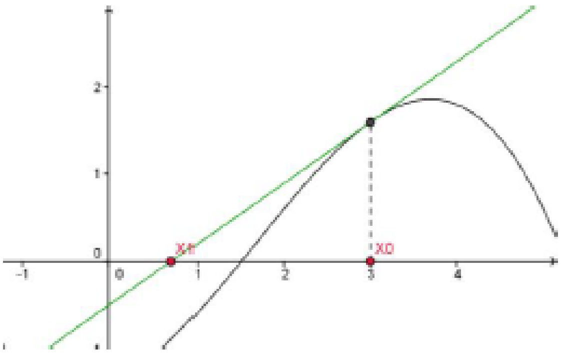
Das leistungsfähigste Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen ist das Tangentenverfahren von Newton-Raphson (Isaac Newton, 1643- 1727, Joseph Raphson 1648-1715).



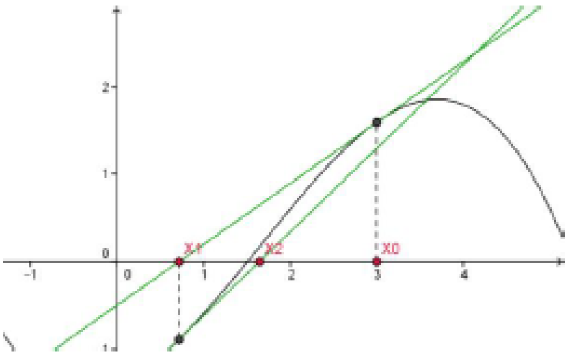
Isaac Newton

Beschreibung des Newton-Raphson-Verfahrens:

- Wir wählen zuerst einen x-Wert, der in der Nähe der gesuchten Nullstelle liegt. Wir nennen ihn x_0 .
- Nun wird bei x_0 der Graph der Funktion durch die Tangente angenähert und die Nullstelle x_1 dieser Tangente bestimmt. x_1 liegt in der Regel schon viel näher bei der gesuchten Nullstelle als der Ausgangswert x_0.
- Mit dem neuen, verbesserten Ausgangswert wird das Verfahren nun weiter wiederholt und man erhält die Werte x_2, x_3, … die sich immer mehr der gesuchten Lösung nähern.
- Man erhält so mit wenigen Schritten ziemlich gute Näherungen für die gesuchte Lösung.



Figur 1: ein erster Schritt ergibt aus x_0 das x_1



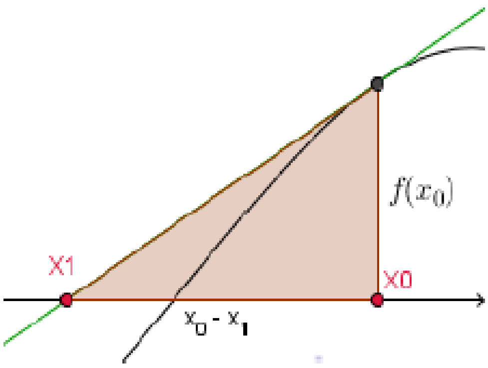
Figur 2: der zweite Schritt führt zum verbesserten Wert x_2

Wie berechnet man die Nullstelle der Tangente?

Gemäss der Figur rechts hat die Tangente die gleiche Steigung wie die Funktion f bei x_0, sie beträgt demnach $f'(x_0)$.

Gleichzeitig lässt sich die Steigung der Geraden im markierten Dreieck als $\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}$ berechnen.

Es gilt daher $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1}$ und aufgelöst nach x_1 erhält man $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$



Figur 3: Berechnung von x_1 mithilfe der Steigung

Analog erhält man für die weiteren Schritte die allgemeine Formel für das Newton-Verfahren:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Bemerkungen zum Newton-Verfahren:

- Die **Effizienz** des Verfahrens ist sehr hoch. Im Mittel verdoppelt sich die Anzahl der richtigen Dezimalstellen mit jedem Schritt. Grund; Die Tangentenmethode des Newton-Verfahrens wirkt von Schritt zu Schritt besser, da eine differenzierbare Funktion umso „linearer" verläuft, je kleiner der betrachtete Bereich ist.
- Das Verfahren besitzt sympathischerweise eine eingebaute **Selbstkorrektur**. Vereinzelte Rechenfehler werden in den folgenden Schritten automatisch ausgeglichen.
- Liegen **mehrere Nullstellen** vor, so muss das Verfahren mehrfach angewandt werden. Auf welche Nullstelle es sich einpendelt, hängt von der Wahl des Startwertes ab.
- Ein **Versagen des Verfahrens** kann eintreten, wenn der Startwert ungünstig gewählt wird. Der Startwert sollte möglichst nahe bei der gesuchten Nullstelle liegen.

Praktische Anwendung des Newton-Verfahrens: Ein Beispiel und Aufgaben

Aufgabenstellung: Bestimme die Lösung der Gleichung $x^3 - x = 2$ näherungsweise auf 4 Stellen nach dem Komma genau.

1. Schritt: Umformung — Durch Umformung erhält man $x^3 - x - 2 = 0$, das heisst, wir suchen die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - x - 2$

2. Schritt: Wertetabelle — Ein Wertetabelle ergibt einen groben Verlauf der Funktion:

x =	0	1	2	3
f(x) =	-2	-2	4	22

Die Wertetabelle zeigt, dass zwischen 1 und 2 eine Nullstelle liegen muss, weil in diesem Bereich die Funktionswerte vom negativen in den positiven Bereich wechseln.

3. Schritt: Startwert bestimmen — Wir wählen als Startwert $x_0 = 1$ (möglich wären auch 2 oder 1.5)

4. Schritt: Iteration — Eine Wiederholung der gleichen Rechenschritte nennt man Iteration. Wir berechnen die Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mit der Formel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

mit $f(x) = x^3 - x - 2$ und $f'(x) = 3x^2 - 1$ erhalten wir

$x_{n+1} = x_n - \frac{x^3-x-2}{3x^2-1}$ und damit folgende Werte:

$x_0 = 1$
$x_1 = 2$
$x_2 = 1.6364$
$x_3 = 1.5304$
$x_4 = 1.5214$
$x_5 = 1.5214$

5. Schritt: Resultat — Die Lösung der Gleichung lautet demnach <u>**x = 1.5214**</u>

Weitere (Klausur-)Rechenbeispiele:

Aufgabe 1: Newton-Verfahren (6)
Beschreiben Sie das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung an dem Beispiel $f(x) = x^3 - x^2 - 3$ anhand einer Skizze. Berechnen Sie dazu x_0 sowie x_1 und geben Sie die vollständige Gleichung der ersten Tangente an.

Lösung
1. Schritt: VZW mit Hilfe der Wertetabelle suchen, z.B. $f(1) = -3$; $f(2) = 1 \Rightarrow x_0 = 1{,}5$ (1)

2. Schritt: Iterationsformel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ solange anwenden, bis sich zwei aufeinander folgende Werte in den gewünschten Nachkommastellen nicht mehr unterscheiden. (2)

Skizze (1)

$f(\frac{3}{2}) = -\frac{15}{8}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x$ mit $f'(\frac{3}{2}) = \frac{15}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow t_1(x) = \frac{15}{4}x - \frac{15}{2}$ (2)

Aufgabe 2: Newton-Verfahren (6)
Beschreiben Sie das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung an dem Beispiel $f(x) = x^3 - x - 1$ anhand einer Skizze. Berechnen Sie dazu x_0 sowie x_1 und geben Sie die vollständige Gleichung der ersten Tangente an.

Lösung
1. Schritt: VZW mit Hilfe der Wertetabelle suchen, z.B. $f(1) = -1$; $f(2) = 5 \Rightarrow x_0 = 1{,}5$ (1)

2. Schritt: Iterationsformel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ solange anwenden, bis sich zwei aufeinander folgende Werte in den gewünschten Nachkommastellen nicht mehr unterscheiden. (2)

Skizze (1)

$f(\frac{3}{2}) = \frac{7}{8}$, $f'(x) = 3x^2 - 1$ mit $f'(\frac{3}{2}) = \frac{23}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} - \frac{7}{46} = \frac{31}{23}$ mit $t_1(x) = \frac{23}{4}x - \frac{31}{4}$ (2)

Übungsaufgaben:

Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens folgende Wurzel-Werte reeller Zahlen:

$$\sqrt{7} \qquad \sqrt{3} \qquad \sqrt[3]{5} \qquad \sqrt[4]{12} \qquad \sqrt[5]{8}$$

Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktionen:

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \qquad\qquad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - 2x + 1$$

Begründen Sie, warum die nachfolgenden Funktionen im jeweils angegebenen Intervall I eine Nullstelle besitzen und bestimmen Sie diese.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 3 \qquad I = [1;4]$$

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 5 \qquad I = [-2;0]$$

Weitere Übungen:

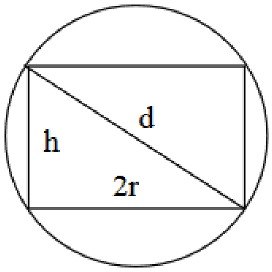
1. Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren näherungsweise die Lösungen der folgenden Gleichungen. Beginnen Sie mit dem Startwert x_1 und führen Sie jeweils zwei Näherungsschritte durch.

a) $x^3 + x - 1 = 0$, $x_1 = 0,5$ b) $x^3 - 4x + 2 = 0$, $x_1 = 1$ ($x_1 = -1$)

c) $x^3 + 3x = 6$, $x_1 = 1$ d) $\sqrt{x-1} = x^2 - 2$, $x_1 = 1$ ($x_1 = 2$)

2. Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren eine Extremstelle der Funktion f: $x \mapsto 0,5x^4 + 1,5x^2 - x + 5$ auf zwei Dezimalen genau. (Startwert: $x_1 = 0$)

3. Eine Kugel mit Durchmesser $d = 18$ (cm) soll so bearbeitet werden, dass ein Zylinder (Höhe h, Radius r) übrig bleibt (siehe Skizze unten), dessen Volumen 25% des Kugelvolumens beträgt. Bestimmen Sie die Höhe dieses Zylinders auf zwei Dezimalen genau (Startwert: $h_1 = 3$).



4. Welches Problem ergibt sich, wenn man das Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_1 = 1$ zum Lösen der Gleichung $x^3 - 5x = 0$ anzuwenden versucht?

5. Zeige: Wenn man das Newton-Verfahren anwendet, um die Gleichung $x^2 = a$ zu lösen, ergibt sich die Gleichung

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

(Anmerkung: Dieses Verfahren, um näherungsweise $\sqrt{a}$ zu berechnen, wurde bereits ca. 1750 v. Chr. in Mesopotamien verwendet. Der griechische Mathematiker und Ingenieur Heron von Alexandria machte es im 1. Jahrhundert nach Christus dann aber im ganzen römischen Reich bekannt; deshalb nennt man es heute das *Heron-Verfahren*.)