Übungsblatt: Differentialrechnung

Mathematik
Jürgen Meisel

1.) Bestimmen Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x}$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$

d) f(x) = $4x^3 - 3x^2 + x + 2$

e) f(x) = $5x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

f) f(t) = $\frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} + 5$

$$f(t) = \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} + 5 = 2t^{-3} - 1t^{-1} + 5t^0 \quad \rightarrow \quad f'(t) = -6t^{-4} + 1t^{-2} = -\frac{6}{t^4} + \frac{1}{t^2}$$

g) f(x) = $x^4 * e^x$

$$f(x) = x^4 \cdot e^x \xrightarrow{\text{Produktregel}} f'(x) = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x \cdot 1 = \left(4x^3 + x^4\right) \cdot e^x$$

$$f(x) = x^4 \cdot e^{2x} \xrightarrow{\text{Produktregel}} f'(x) = 4x^3 \cdot e^{2x} + x^4 \cdot e^{2x} \cdot 2 = \left(4x^3 + 2x^4\right) \cdot e^{2x}$$

$$f(x) = x^4 \cdot e^{2x^3 - 4x} \xrightarrow{\text{Produktregel}} f'(x) = 4x^3 \cdot e^{2x^3 - 4x} + x^4 \cdot e^{2x^3 - 4x} \cdot \left(6x^2 - 4\right)$$

h) f(**X**) = t^2

i) f(t) = $e^{2t} + e^{t^2} - e$

$$f(t) = e^{2t} + e^{t^2} - e \xrightarrow{\text{Kettenregel}} f'(t) = e^{2t} \cdot 2 + e^{t^2} \cdot 2t$$

j) f(x) = $x^2 * e^x$

k) f(t) = $(x + 4)^3 (x^3 - 2t - 4)^4$

l) f(x) = $(x + 4)^3 (x^3 - 2t - 4)^4$

m) f(x) = $\sqrt{x^2 - 1}$

n) f(x) = $\sqrt[4]{x^2 - 1}$

o) f(x) = $(x^2 - 1) * \frac{1}{x^2}$

p) f(x) = $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} + e^2$

2.) Führen Sie eine Kurvendiskussion der Kurvenscharen $f_k(x)$ durch:

(i) $f_k(x) = \frac{4}{3}x^3 - kx^2 \quad mit\ k > 0$ (ii) $f_k(x) = \frac{1}{2}x^4 - kx^2 \quad mit\ k > 0$

a) Schnittstellen mit den Achsen
b) Extrema
c) Ortskurve der Extrema
d) Wendepunkte
e) Skizze für verschiedene k-Werte

$$f_k(x) = \frac{4}{3}x^3 - kx^2 \quad mit\ k > 0$$

$$f_k(x) = \left(\frac{4}{3}x - k\right)x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0[doppelt]und\ x_2 = \frac{3}{4}k \quad mit\ k > 0$$

$$f_k'(x) = 4x^2 - 2kx = 0 \Rightarrow (4x - 2k)x = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ und\ x_2 = \frac{1}{2}k \quad mit\ k > 0$$

$$f_k''(x) = 8x - 2k \Rightarrow f_k''(0) = -2k < 0 \Rightarrow Max(0/0) \Rightarrow Min\left(\frac{1}{2}k / -\frac{1}{12}k^3\right)$$

$$f_k(x) = \frac{1}{2}x^4 - kx^2 \quad mit\ k > 0$$

$$f_k(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - k\right)x^2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0[doppelt]und\ x_2 = \pm\sqrt{2k} \quad mit\ k > 0$$

$$f_k'(x) = 2x^3 - 2kx = \left(2x^2 - 2k\right)x = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0\ und\ x_2 = \pm\sqrt{k} \quad mit\ k > 0$$

$$f_k''(x) = 6x^2 - 2k \Rightarrow f_k''(0) = -2k < 0 \Rightarrow Max(0/0) \Rightarrow Min\left(\pm\sqrt{k} / -\frac{1}{2}k^2\right)$$

$$f_k(x) = \frac{1}{2}x^4 - kx^2 \quad mit\ k > 0$$

3.) Ableitungen von besonderer Güte: die Exponentialfunktionen

a) f (x) = e^x b) f (x) = a^x c) f (x) = x^x

d) f (x) = a^{x^2} e) f (x) = $a^{2x^4 - x^2}$ f) f (x) = $4x^{x^5 - 3x^4 - 1}$

4.) Fragestellungen zu ganzrationalen Funktionen mit Parameter

(i) Wie muss der Parameter k gewählt werden, damit die Funktion $f_k(x) = 4x^3 + kx^2$ einen Hochpunkt bei x = -1 besitzt?

(ii) Welche Ursprungsgerade ist Tangente an den Graphen von

a) $f(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad mit\ x > 0$? b) $f(x) = \sqrt{x} - 1 \quad mit\ x > 0$?

(iii) Welche Tangente an den Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$ ist parallel zur Sehne durch die Punkte P(4 / 2) und Q(0 / 0)?

LÖSUNGEN

---

a) f (x) = $4x^3 - 3x^2 + x + 2$

b) f (x) = $5x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

c) f (t) = $\frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} + 5$

f) f (x) = $x^4 * e^x$

g) f (x) = t^2

l) f (t) = $e^{2t} + e^{t^2} - e$

p) f (x) = $x^2 * e^x$

q) f (t) = $(t^2 + x + 4)(x^3 - 2t - 4)$

r) f (x) = $(t^2 + x + 4)(x^3 - 2t - 4)$

t) f (x) = $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$

u) f (x) = $\sqrt{x^2 - 1}$

v) f (x) = $\sqrt[4]{x^2 - 1}$

y) f (x) = $(x^2 - 1) * \frac{1}{x^2}$

z) f (x) = $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} + e^2$

$a) \quad f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 2$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Summenregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = 12x^2 - 6x + 1$$

$b) \quad f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Summenregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = 15x^2 - 4x + 3$$

$c) \quad f(t) = \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} + 5$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Summenregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(t) = -\frac{6}{t^4} + \frac{1}{t^2}$$

$d) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + \frac{x^2}{x} = x\left[2 \cdot \ln(x) + 1\right]$$

$e) \quad f(t) = \frac{\ln(t)}{t} = t^{-1} \cdot \ln(t)$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(t) = -t^{-2} \cdot \ln(t) + t^{-1} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2}\left[1 - \ln(t)\right]$$

$f) \quad f(x) = x^4 \cdot e^x$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x = x^3 \cdot e^x \left[4 + x\right]$$

$g) \quad f(x) = t^2$

$$\xrightarrow[\text{Potenzregel (aber: Hallo - wach!!! - Funktionsvartiable)}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = 0$$

$h) \quad f(t) = \frac{e^t}{1 - e^t}$

$$\xrightarrow[\text{Quotientenregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(t) = \frac{e^t\left(1 - e^t\right) - e^t\left(-e^t\right)}{\left(1 - e^t\right)^2} = \frac{e^t}{\left(1 - e^t\right)^2}$$

$$i)\quad f(x)=\ln\sqrt[3]{\frac{2x-1}{2x+1}}=\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Ketten-/Quotientenregel}]{\text{1. Ableitung:}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{2x-1}{2x+1}}\cdot\frac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x+1)^2}=\frac{4}{3(4x^2-1)}$$

$$j)\quad f(x)=\ln\left(1-3x^2\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=-\frac{6x}{1-3x^2}$$

$$k)\quad f(x)=(1-\ln x)^3$$

$$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=3(1-\ln x)^2\cdot\frac{-1}{x}=-\frac{3(1-\ln x)^2}{x}$$

$$l)\quad f(t)=e^{2t}+e^{t^2}-e$$

$$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(t)=2e^{2t}+2te^{t^2}$$

$$m)\quad f(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)$$

$$\xrightarrow[\text{Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+\frac{e^x}{2}(\cos x-\sin x)=e^x\cos x$$

$$n)\quad f(t)=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(t)=\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1+\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}\right)=\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

$$o)\quad f(x)=x^3+\ln x$$

$$\xrightarrow[\text{Potenzregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=3x^2+\frac{1}{x}$$

$p) \quad f(x) = x^2e^x$

$$\xrightarrow[\text{Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$$

$q) \quad f(t) = (t^2 + x + 4)(x^3 - 2t - 4)$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Summen-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(t) = 2t(x^3 - 2t - 4) - 2(t^2 + x + 4)$$

$r) \quad f(x) = (t^2 + x + 4)(x^3 - 2t - 4)$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Summen-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = 1\cdot(x^3 - 2t - 4) + 3x^2\cdot(t^2 + x + 4)$$

$s) \quad f(x) = \ln(x^2 + x)$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + x}\cdot(2x+1)$$

$t) \quad f(x) = \dfrac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$

$$\xrightarrow[\text{Quotienten-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}$$

$$f'(x) = \frac{2(1+x)(1-x)^2 - 2(1+x)^2(1-x)}{(1-x)^4} = -\frac{4x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$u) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$v) \quad f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1} = (x^2 - 1)^{\frac{1}{4}}$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = \frac{1}{4}\cdot(x^2 - 1)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2x = \frac{x}{2\cdot\sqrt[4]{(x^2-1)^3}}$$

$w)\quad f(t)=\dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$

$\xrightarrow[\text{Quotienten-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}$

$$f'(t)=\frac{2t\sqrt{1-t^2}-t^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\cdot(-2t)}{1-t^2}=\frac{2t+\frac{t^3}{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$$

$x)\quad f(x)=\dfrac{5}{1+e^{2-3x^3}}=5\cdot\left(1+e^{2-3x^3}\right)^{-1}$

$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}$

$$f'(x)=-5\cdot\left(1+e^{2-3x^3}\right)^{-2}\cdot e^{2-3x^3}\cdot\left(-9x^2\right)=\frac{45x^2\cdot e^{2-3x^3}}{\left(1+e^{2-3x^3}\right)^2}$$

$y)\quad f(x)=\left(x^2-1\right)\cdot\dfrac{1}{x^2}$

$\xrightarrow[\text{Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=2x\cdot\dfrac{1}{x^2}+\left(x^2-1\right)\cdot\dfrac{(-2)}{x^3}=\dfrac{2}{x^3}$

$z)\quad f(x)=\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}+e^2=x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+e^2$

$\xrightarrow[\text{Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$ä)\quad f(a)=\dfrac{a^2-4a+3}{-3a^2+12a-9}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\dfrac{a^2-4a+3}{a^2-4a+3}\quad\Rightarrow\quad f^*(a)=\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$\xrightarrow[\text{Potenzregel}]{\text{1. Ableitung:}}\quad f'(a)=0$

3.) Ableitungen von besonderer Güte: die Exponentialfunktionen

a) f (x) = e^x b) f (x) = a^x c) f (x) = x^x

d) f (x) = a^{x^2} e) f (x) = $a^{2x^4-x^2}$ f) f (x) = $4x^{x^5-3x^4-1}$

$$a)\quad f(x)=e^x \xrightarrow{\text{1. Ableitung:}} f'(t)=e^x$$

$$b)\quad f(x)=a^x \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}} f(x)=e^{\ln\left(a^x\right)}=e^{x\cdot\ln a}$$

$$\xrightarrow{\text{1. Ableitung: Kettenregel}} f'(x)=e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$$

$$c)\quad f(x)=x^x \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}} f(x)=e^{\ln\left(x^x\right)}=e^{x\cdot\ln x}$$

$$\xrightarrow{\text{1. Ableitung: Ketten-/Produktregel}} f'(x)=e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x\cdot(\ln x+1)$$

$$d)\quad f(x)=a^{x^2} \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}} f(x)=e^{\ln\left(a^{x^2}\right)}=e^{x^2\cdot\ln a}$$

$$\xrightarrow{\text{1. Ableitung: Kettenregel}} f'(x)=e^{x^2\cdot\ln a}\cdot 2x\ln a=a^{x^2}\cdot 2x\ln a$$

$$e)\quad f(x)=a^{2x^4-x^2} \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}}$$

$$f(x)=e^{\ln\left(a^{2x^4-x^2}\right)}=e^{\left(2x^4-x^2\right)\cdot\ln a} \xrightarrow{\text{1. Ableitung: Kettenregel}}$$

$$f'(x)=e^{\left(2x^4-x^2\right)\cdot\ln a}\cdot\left(8x^3-2x\right)\ln a=a^{2x^4-x^2}\cdot 2x\cdot\left(4x^2-1\right)\ln a$$

$$f)\quad f(x)=x^{x^5-3x^4-1} \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}}$$

$$f(x)=e^{\ln\left(x^{x^5-3x^4-1}\right)}=e^{\left(x^5-3x^4-1\right)\cdot\ln x} \xrightarrow{\text{1. Ableitung: Ketten-/Produktregel}}$$

$$f'(x)=e^{\left(x^5-3x^4-1\right)\cdot\ln x}\cdot\left[\left(5x^4-12x^3\right)\cdot\ln x+\left(x^5-3x^4-1\right)\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$f'(x)=x^{x^5-3x^4-1}\cdot\left[\left(5x^4-12x^3\right)\cdot\ln x+x^4-3x^3-\frac{1}{x}\right]$$