Extrema unter Nebenbedingungen

Fall 1: Maximierung des Produktionsergebnisses unter Beachtung der Kostenvorgabe bzw. des Budgets

Fall 2: Minimierung der Kosten unter Beachtung der Vorgabe des Produktionsergebnisses

- ⇨ Frage nach dem Mitteleinsatz der Produktionsfaktoren zur Optimierung

Produktionsfaktoren: **Arbeit(skraft/szeit)** **Kapital (Maschinen)** Boden

Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Produktionsfunktion: $f\left(A,K\right)=k\cdot A^{\alpha}\cdot K^{\beta}\overset{Cobb-Douglas}{=}k\cdot A^{\alpha}\cdot K^{1-\alpha}$

A=Arbeitszeit K=Maschinenlaufzeit

Extremum unter NB:

Fragestellung:
Maximierung des Produktionsergebnisses unter Beachtung der Kostenvorgabe bzw. des Budgets

Beispiel: **1 h Arbeitszeit kostet 20 GE** **1 h Maschinenlaufzeit kostet 30 GE**
Budget: **10.000 GE**

- ⇨ (Neben)Bedingung: $10.000\geq 20A+30K$
- ⇨ **Im Optimalfall wird das Budget vollkommen verwendet:**
  Auflösen der NB nach „NB = 0“

$$10.000=20A+30K\xrightarrow{-20A-30K}10000-20A-30K=0$$

$$oder$$

$$10.000=20A+30K\xrightarrow{-10000}20A+30K-10000=0$$

- ⇨ **Zielfunktion: Funktion deren Optimum ermittelt werden soll => hier Produktionsfunktion**

Lösung des Optimierungsproblems erfolgt mittels Lagrange-Ansatz

$$L\left(A,K,\lambda\right) = "ZF"+\lambda\cdot"NB=0"$$

$$L\left(A,K,\lambda\right) = f\left(A,K\right)+\lambda\cdot"NB=0"$$

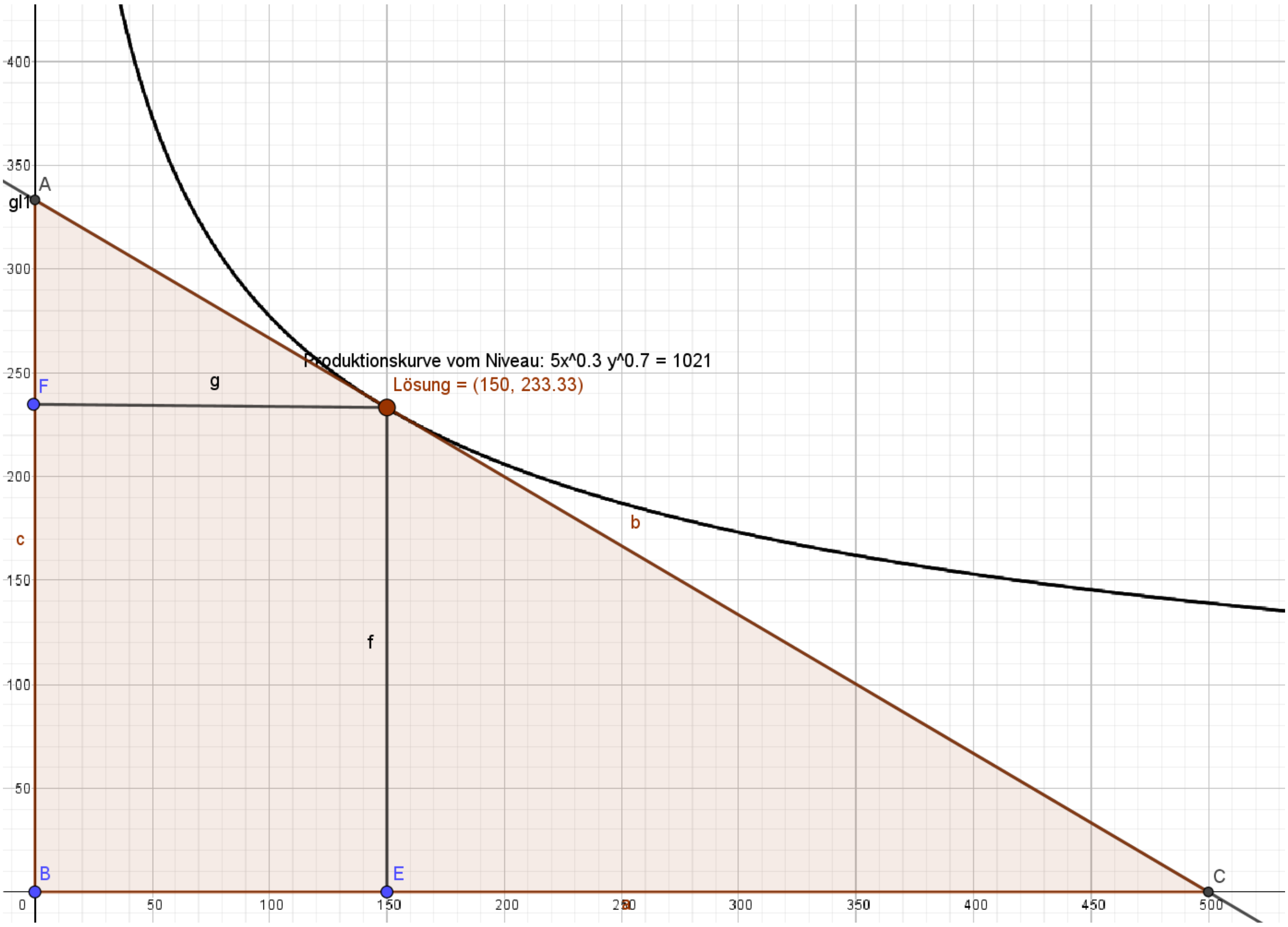
$$L\left(A,K,\lambda\right) = k\cdot A^{\alpha}\cdot K^{1-\alpha}+\lambda\cdot"10.000-20A-30K"$$

Beispiel: $L\left(A,K,\lambda\right) = 5\cdot A^{0,3}\cdot K^{0,7}+\lambda\cdot\left(10.000-20A-30K\right)$

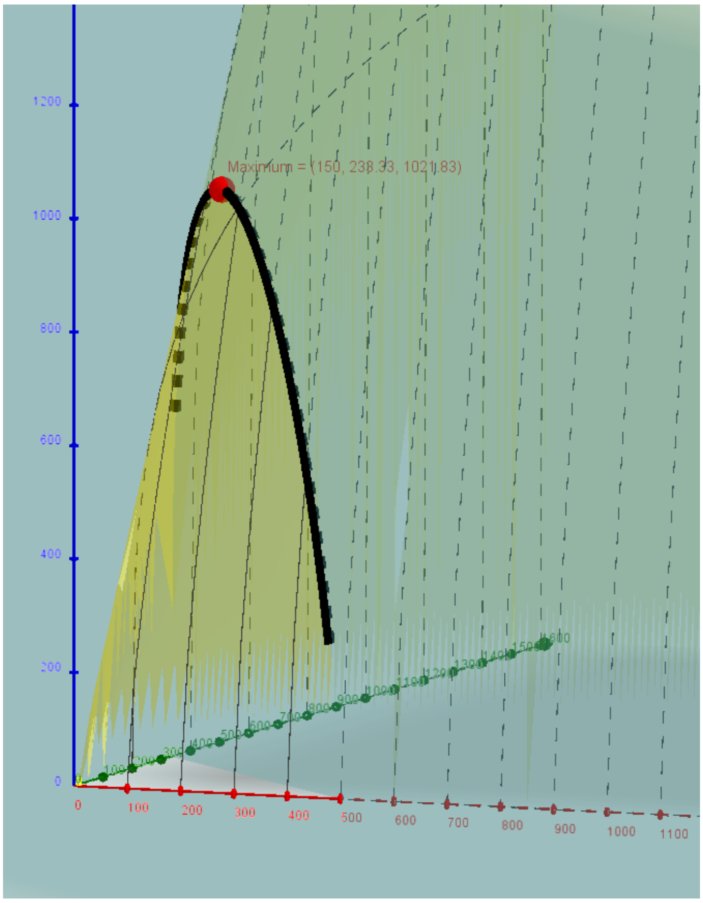
Graphische Lösung: (150/245) ???

Bild 1: 2-D-Graphik

Bild 2: 3-D-Graphik



Produktionskurve vom Niveau: 5x^0.3 y^0.7 = 1021
Lösung = (150, 233.33)
A
gl1
F
g
c
f
b
B
E
C
400
350
300
250
200
150
100
50
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500



Maximum = (150, 233.33, 1021.83)
1200
1000
800
600
400
200
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100

Analytische Lösung mittels Lagrange:

$$L(A,K,\lambda) \;=\; 5\cdot A^{0,3}\cdot K^{0,7}+\lambda\cdot(10.000-20A-30K)$$
$$L(A,K,\lambda) \;=\; 5\cdot A^{0,3}\cdot K^{0,7}+10.000\lambda-20\lambda A-30\lambda K$$

Partielle Ableitungen nach A und K und auflösen nach λ:

$$L(A,K,\lambda) \;=\; 5\cdot A^{0,3}\cdot K^{0,7}+\lambda\cdot(10.000-20A-30K)$$
$$L(A,K,\lambda) \;=\; 5\cdot A^{0,3}\cdot K^{0,7}+10.000\lambda-20\lambda A-30\lambda K$$

$$L_A(A,K,\lambda) \;=\; 1,5\cdot A^{-0,7}\cdot K^{0,7}-20\lambda=0$$
$$L_A(A,K,\lambda) \;=\; 1,5\cdot\frac{K^{0,7}}{A^{0,7}}-20\lambda=0 \xrightarrow{+20\lambda} 1,5\cdot\frac{K^{0,7}}{A^{0,7}}=20\lambda \xrightarrow{:20} \frac{1,5}{20}\cdot\frac{K^{0,7}}{A^{0,7}}=\lambda$$

$$L(A,K,\lambda) \;=\; 3,5\cdot A^{0,3}\cdot K^{-0,3}-30\lambda=0$$
$$L(A,K,\lambda) \;=\; 3,5\cdot\frac{A^{0,3}}{K^{0,3}}-30\lambda=0 \xrightarrow{+30\lambda} 3,5\cdot\frac{A^{0,3}}{K^{0,3}}=30\lambda \xrightarrow{:30} \frac{3,5}{30}\cdot\frac{A^{0,3}}{K^{0,3}}=\lambda$$

Gleichsetzen der nach λ aufgelösten Terme zur Ermittlung des Austauschverhältnisses:

$$\frac{1,5}{20}\cdot\frac{K^{0,7}}{A^{0,7}}=\lambda \quad und \quad \frac{3,5}{30}\cdot\frac{A^{0,3}}{K^{0,3}}=\lambda$$
$$\xrightarrow{\lambda=\lambda} \frac{1,5}{20}\cdot\frac{K^{0,7}}{A^{0,7}}=\frac{3,5}{30}\cdot\frac{A^{0,3}}{K^{0,3}} \xrightarrow[\cdot A^{0,7}]{\cdot K^{0,3}} \frac{1,5}{20}\cdot K=\frac{3,5}{30}\cdot A$$
$$\xrightarrow{:\frac{1,5}{20}} K=\frac{3,5\cdot 20}{30\cdot 1,5}\cdot A \;\rightarrow\; K=\frac{7}{4,5}\cdot A \;\rightarrow\; K=\frac{14}{9}\cdot A$$
$$Austauschverhältnis: \;\rightarrow\; K=\frac{14}{9}\cdot A$$

Einsetzen des Austauschverhältnisses in die Budget-/Nebenbedingung:

Einsetzen in die Budgetbedingung:

$$10.000=20A+30K \xrightarrow{K=\frac{14}{9}\cdot A} 10.000=20A+30\cdot\frac{14}{9}\cdot A \;\rightarrow\; 10.000=\frac{200}{3}A \;\rightarrow\; A=150$$
$$\rightarrow\; K=\frac{14}{9}\cdot A \xrightarrow{A=150} K=\frac{14}{9}\cdot 150=\frac{700}{3}\approx 233,33$$

$$NR: \quad 20A+30\cdot\frac{14}{9}\cdot A \overset{\frac{30}{9}:\text{Kürzen mit 3}}{=} \frac{20\cdot 3}{1\cdot 3}A+10\cdot\frac{14}{3}\cdot A \;=\; \frac{60}{3}A+\frac{140}{3}\cdot A \;=\; \frac{200}{3}A$$

Berechnung des optimalen Produktionsergebnisses:

$$f(A,K) \;=\; 5\cdot A^{0,3}\cdot K^{0,7} \xrightarrow{Produktionsvolumen} f\left(150,\frac{700}{3}\right) \;=\; 5\cdot 150^{0,3}\cdot\left(\frac{700}{3}\right)^{0,7}=1.021,84$$

Erläuterung zum Lagrange-Multiplikator λ:

Berechnung des Multiplikators im Optimum:

$$\lambda = \frac{1,5}{20} \cdot \frac{K^{0,7}}{A^{0,7}} = \frac{1,5}{20} \cdot \left(\frac{K}{A}\right)^{0,7} = \frac{1,5}{20} \cdot \left(\frac{\frac{700}{3}}{150}\right)^{0,7} = 0,102184$$

$$oder \quad \lambda = \frac{3,5}{30} \cdot \frac{A^{0,3}}{K^{0,3}} = \frac{3,5}{30} \cdot \left(\frac{A}{K}\right)^{0,3} = \frac{3,5}{30} \cdot \left(\frac{150}{\frac{700}{3}}\right)^{0,3} = 0,102184$$

Ökonomisch Bedeutung:

Wird das Budget um Δ b Einheiten verändert (erhöht oder verringert), dann ändert sich das Produktionsergebnis um λ*Δ b Einheiten.

Beispiel:
Budget erhöht sich um 200 GE => Produktionsergebnis erhöht sich um 200 * 0,1022 = 20,44

Nachweis durch Berechnung des neuen Produktionsergebnisses bei erhöhtem Budget:

Einsetzen in die Budgetbedingung:

$$10.200 = 20A + 30K \xrightarrow{K=\frac{14}{9}\cdot A} 10.200 = 20A + 30 \cdot \frac{14}{9} \cdot A \rightarrow 10.200 = \frac{200}{3}A \rightarrow A = 153$$

$$\rightarrow K = \frac{14}{9} \cdot A \xrightarrow{A=153} K = \frac{14}{9} \cdot 153 = 238$$

Neues Produktionsergebnis:

$$f(A,K) = 5 \cdot A^{0,3} \cdot K^{0,7} \xrightarrow{\text{Produktionsvolumen}} f_{neu}(153,238) = 5 \cdot 153^{0,3} \cdot 238^{0,7} = 1.042,27$$

$$\Delta f = f_{neu} - f_{alt} = 1.042,27 - 1.021,84 = 20,43$$