Extremwertberechnung mit Nebenbedingung(en)

1.) $f\left(x,y\right)=x^2-2xy \qquad NB: y=2x-6$

Lösung:

$$L=x^2-2xy+\lambda\left(6-2x+y\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x=2x-2y-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=x-y \\ L_y=-2x+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2x \end{array}\right\} x-y=2x \Rightarrow y=-x$$

$$L_\lambda=6-2x+y=0$$

$$L_\lambda=6-2x-x=0 \Rightarrow x=2 \; und \; y=-2 \; und \; \lambda=4$$

$$H=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}=0+4+4-2-0-0=6>0 \Rightarrow Max$$

2.) $f\left(x,y\right)=10x^{0,4}y^{0,6}$ $\quad NB: 8x+3y=100$

Lösung:

$$L=10x^{0,4}y^{0,6}+\lambda\left(100-8x-3y\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x=4\dfrac{y^{0,6}}{x^{0,6}}-8\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=\dfrac{y^{0,6}}{2x^{0,6}} \\ L_y=6\dfrac{x^{0,4}}{y^{0,4}}-3\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=\dfrac{2x^{0,4}}{y^{0,4}} \end{array}\right\} \dfrac{y^{0,6}}{2x^{0,6}}=\dfrac{2x^{0,4}}{y^{0,4}} \Rightarrow y=4x$$

$$100-8x-3y=0 \Rightarrow 100=20x \Rightarrow x=5 \quad und \quad y=20$$

$$H=\begin{pmatrix} 0 & -8 & -3 \\ -8 & -2,4\dfrac{y^{0,6}}{x^{1,6}} & 2,4\dfrac{1}{x^{0,6}y^{0,4}} \\ -3 & 2,4\dfrac{1}{x^{0,6}y^{0,4}} & -2,4\dfrac{x^{0,4}}{y^{1,4}} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(x,y\right)=f\left(5/20\right)=10\cdot 5^{0,4}\cdot 20^{0,6}=114,87 \\ \\ 110=20x \Rightarrow x=5,5 \quad und \quad y=22 \\ f\left(x,y\right)=f\left(5,5/22\right)=10\cdot 5,5^{0,4}\cdot 22^{0,6}=126,36 \end{array}\right\} 126,36-114,87=11,49$$

$$\lambda=\frac{20^{0,6}}{2\cdot 5^{0,6}}=0,5\cdot 4^{0,6}=1,1487$$

3.) Gegeben ist die Produktionsfunktion $f(x,y)=10x^{0,7}y^{0,3}$ sowie die konstanten Faktorkosten k_1 = 12 GE und k_2 = 18 GE.

a) Erstellen Sie die Kostenfunktion.

b) Ermitteln Sie die Minimalkostenkombination bei einem Output von 200.

c) Ermitteln Sie den maximalen Output für die Gesamtkosten von 400.

Lösung:

a) $k(x,y) = 12x+18y$

b) Austauschverhältnis wie in c)

$$f(x,y) = 10x^{0,7}y^{0,3} = 200 \quad \leftrightarrow \quad NB$$

$$k(x,y) = 12x+18y \quad \rightarrow \quad \min. \quad \leftrightarrow \quad ZF$$

$$L(x,y,\lambda) = 12x+18y+\lambda\left(200-10x^{0,7}y^{0,3}\right)$$

$$L_\lambda(x,y,\lambda) = 200-10x^{0,7}y^{0,3}$$

$$L_x(x,y,\lambda) = 12-7\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}}\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{12}{7}\cdot\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}}$$

$$L_y(x,y,\lambda) = 18-3\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}}\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=6\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}}$$

$$\xrightarrow{Gleichsetzen} \quad \frac{2}{7}\cdot x = y$$

$$\xrightarrow{in\ NB} \quad 200 = 10x^{0,7}\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot x\right)^{0,3} = 10\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{0,3}\cdot x$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{20}{\left(\frac{2}{7}\right)^{0,3}} \approx 29{,}12 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2}{7}\cdot 29{,}12 \approx 8{,}32$$

$$\rightarrow \quad k(29{,}12/8{,}32) = 12\cdot 29{,}12+18\cdot 8{,}32 = 499{,}2$$

$$\rightarrow \quad \lambda = \frac{12}{7}\cdot\frac{29{,}12^{0,3}}{8{,}32^{0,3}} = \frac{12}{7}\cdot\left(\frac{29{,}12}{8{,}32}\right)^{0,3} = 2{,}496$$

c)

$$f(x,y) \quad = \quad 10x^{0,7}y^{0,3} \quad \to \quad \max. \quad \leftrightarrow \quad ZF$$
$$k(x,y) \quad = \quad 12x+18y \quad = \quad 400 \quad \leftrightarrow \quad NB$$

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 10x^{0,7}y^{0,3}+\lambda(400-12x-18y)$$
$$L_\lambda(x,y,\lambda) \quad = \quad 400-12x-18y$$
$$\left.\begin{array}{lll} L_x(x,y,\lambda) & = & 7\dfrac{y^{0,3}}{x^{0,3}}-12\lambda=0 \quad \to \quad \lambda=\dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{y^{0,3}}{x^{0,3}} \\ L_y(x,y,\lambda) & = & 3\dfrac{x^{0,7}}{y^{0,7}}-18\lambda=0 \quad \to \quad \lambda=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{x^{0,7}}{y^{0,7}} \end{array}\right\} \xrightarrow{\textit{Gleichsetzen}} \quad y \quad = \quad \frac{2}{7}\cdot x$$

$$\xrightarrow{\textit{in NB}} \quad 400 \quad = \quad 12x+18\cdot\frac{2}{7}x \quad = \quad 12x+18\cdot\frac{2}{7}x \quad = \quad \frac{84}{7}x+\frac{36}{7}x$$
$$\to \quad 400 \quad = \quad \frac{120}{7}x \quad \to \quad x \quad = \quad \frac{70}{3} \quad \approx \quad 23,3 \quad \to \quad y \quad = \quad \frac{2}{7}\cdot\frac{70}{3} \quad = \quad \frac{20}{3} \quad \approx \quad 6,67$$
$$\to \quad f\left(\frac{70}{3},\frac{20}{3}\right) \quad = \quad 10\cdot\left(\frac{70}{3}\right)^{0,7}\cdot\left(\frac{20}{3}\right)^{0,3} \quad = \quad 160,2346$$
$$\to \quad \lambda \quad = \quad \frac{7}{12}\cdot\frac{\left(\frac{20}{3}\right)^{0,3}}{\left(\frac{70}{3}\right)^{0,3}} \quad = \quad \frac{7}{12}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{0,3} \quad = \quad 0,4006$$

Erklärung zu λ

Eine Veränderung des Budgets um k Einheiten würde das Produktionsergebnis bzw. das Ergebnis der Zielfunktion um $k\cdot\lambda$ verändern.

Beispiel:

$$f(x,y) \quad = \quad 10x^{0,7}y^{0,3} \quad \to \quad \max. \quad \leftrightarrow \quad ZF$$
$$k(x,y) \quad = \quad 12x+18y \quad = \quad 410 \quad \leftrightarrow \quad \Delta k=10$$

$$\to \quad 410 \quad = \quad \frac{120}{7}x \quad \to \quad x \quad = \quad \frac{410\cdot 7}{120} \quad \approx \quad 23,917$$
$$\to \quad y \quad = \quad \frac{2}{7}\cdot 23,917 \quad \approx \quad 6,83$$
$$\to \quad f(23,917,6,83) \quad = \quad 10\cdot 23,917^{0,7}\cdot 6,83^{0,3} \quad = \quad 164,22$$

$$\to \quad 160,2346+10\cdot\lambda \quad = \quad 160,2346+10\cdot 0,4006 \quad = \quad 164,23$$

4.) Student Rudi Pfiffig hat genau 12 € bei sich. Da er hungrig und durstig ist er bestrebt sein persönliches Wohlbefinden, welches funktional in folgender Weise definiert werden kann $f\left(B,E\right)=2B^{0,5}E^{0,5}$ optimal zu befriedigen.
Er kann eine beliebige Kombination zwischen B(ier) und E(rdnüssen) wählen.
Die Erdnüsse kosten 1 € (pro Tüte) und das Glas Bier kostet 1,50 €.
Wie viele Tüten Erdnüsse und wie viele Gläser Bier kann Pfiffig bei seinem Budget konsumieren, um sein Wohlbefinden maximal zu gestalten?

$$L\left(B,E,\lambda\right)=2B^{0,5}E^{0,5}+\lambda\left(12-1{,}5B-E\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_B\left(B,E,\lambda\right)=\dfrac{E^{0,5}}{B^{0,5}}-1{,}5\lambda=0 \Rightarrow \dfrac{2E^{0,5}}{3B^{0,5}}=\lambda \\ L_E\left(B,E,\lambda\right)=\dfrac{B^{0,5}}{E^{0,5}}-\lambda=0 \Rightarrow \dfrac{B^{0,5}}{E^{0,5}}=\lambda \end{array}\right\} \dfrac{2E^{0,5}}{3B^{0,5}}=\dfrac{B^{0,5}}{E^{0,5}} \Rightarrow B=\dfrac{2}{3}E$$

$$12=\frac{3}{2}B+E \Rightarrow 12=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}E+E \Rightarrow E=6 \Rightarrow B=4$$

5.) Gegeben ist die Produktionsfunktion: $f\left(E,A\right)=500E+800A+EA-E^2-2A^2$
Der Energiepreis beträgt 100 GE/MWh und der Preis für Arbeit beträgt 50 GE/h.
a) Bei welcher Inputkombination wird der höchste Output erzielt?
b) Bei welcher Inputkombination wird der höchste Output erzielt, wenn die Produktionskosten genau 27.500,00 € betragen sollen?

Lösung zu a)

$$\frac{\partial f\left(E,A\right)}{\partial E}=500+A-2E \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach A auflösen}} A=2E-500$$

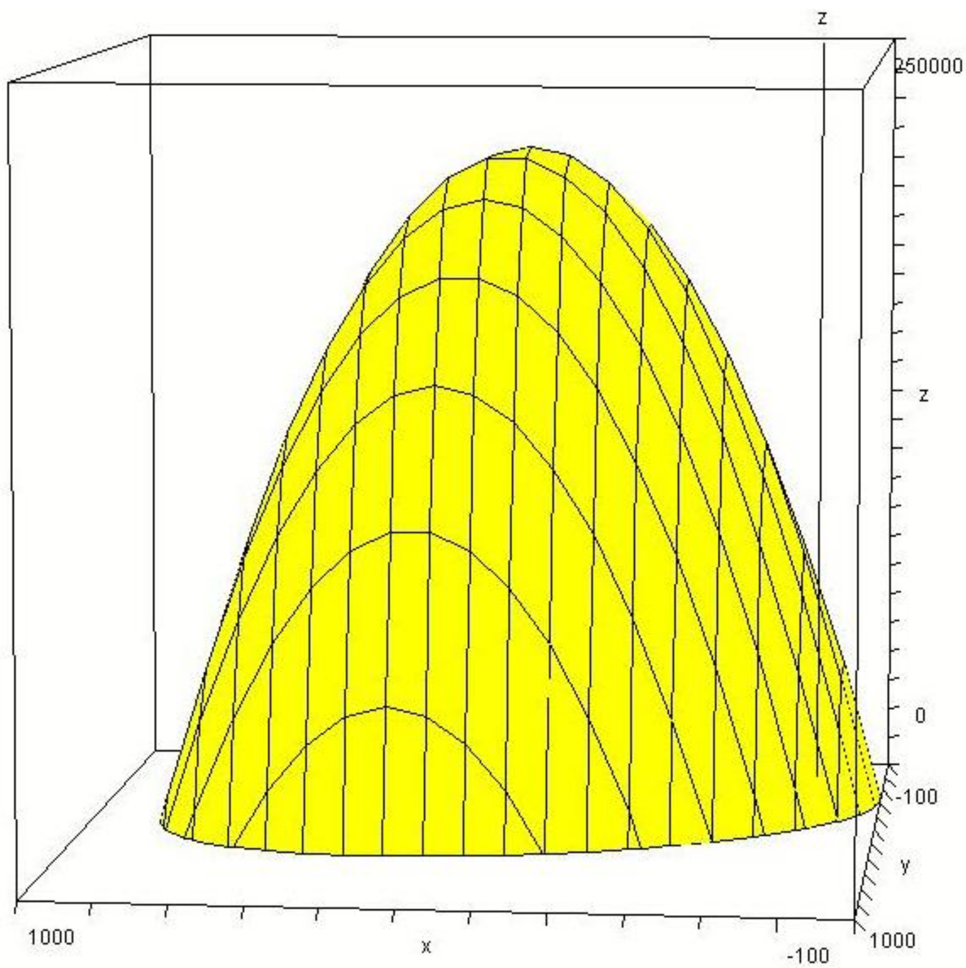
$$\frac{\partial f\left(E,A\right)}{\partial A}=800+E-4A \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach A auflösen}} A=\frac{1}{4}E+200$$

$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} E=400 \xrightarrow{\text{einsetzen}} A=300$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H\left(f\right)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Auswertung}} \begin{cases} f_{EE}=-2<0 \\ Det\left(H\left(f\right)\right)=7>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{negativ definit} \Rightarrow \text{Maximum} \Rightarrow \text{Max}\left(400 \mid 300 \mid 220.000\right)$$



Lösung zu b)

$$Lagrangeansatz:$$

$$L(E,A,\lambda) = 500E + 800A + EA - E^2 - 2A^2 + \lambda(27.500 - 100E - 50A)$$

$$\frac{\partial L(E,A,\lambda)}{\partial E} = 500 + A - 2E - 100\lambda \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{nach\,100\,\lambda\ auflösen} 100\lambda = 500 + A - 2E$$

$$\frac{\partial L(E,A,\lambda)}{\partial A} = 800 + E - 4A - 50\lambda \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{nach\,100\,\lambda\ auflösen} 100\lambda = 1.600 + 2E - 8A$$

$$\xrightarrow{gleichsetzen} 500 + A - 2E = 1.600 + 2E - 8A \xrightarrow{nach\ E\ auflösen} E = \frac{9}{4}A - 275$$

$$\xrightarrow{\text{E einsetzen in NB}} A = 200 \Rightarrow E = 175 \Rightarrow f(175;200) = 171.875$$

6.) Loisl Huber hört sehr gerne klassische Musik mit Bach (b) und Mozart (m).
Sein tägliches Lustniveau N hängt von der Hördauer b und m ab.

$$n(b,m) \quad = \quad -10+2m+b+2\sqrt{mb}$$

Für diesen musikalischen Kunstgenuss bleiben ihm genau 5 Stunden.

Wie lange wird Loisl pro Tag Bach und wie lange Mozart hören, damit er sein tägliches Wohlbefinden optimal gestaltet?

7.) Ein Unternehmen produziert ein Gut gemäß folgender Produktionsfunktion:

$$q(A,K) = 100\, A^{0,8} K^{0,2}$$

mit A = Arbeits- und K = Kapitalinput.
Pro Arbeitseinheit wird ein Lohn von 20 GE fällig, eine Kapitaleinheit verursacht 10 GE an Zinskosten.

a) Man ermittle den kostengünstigsten Faktoreinsatz bei einem Produktionsvolumen von 10.000 Mengeneinheiten.
b) Wie hoch ist der Output bei einem Budget von 6.000 Geldeinheiten?

Anmerkung zu den Lösungen:

Bei den beiden Ansätzen werden nur jeweils NB und Zielfunktion getauscht; daher würde sich jeweils das gleiche Austauschverhältnis ergeben,

Trotzdem habe ich in beiden Teilaufgaben die Ansätze und dann die komplette Berechnung durchgeführt 😉

Lösung zu a)

$$L(A,K,\lambda)=20A+10K+\lambda\left(10.000-100A^{0,8}K^{0,2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_A(A,K,\lambda)=20-80\lambda\cdot\dfrac{K^{0,2}}{A^{0,2}}=0 \Rightarrow \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{A^{0,2}}{K^{0,2}}=\lambda \\ L_K(A,K,\lambda)=10-20\lambda\cdot\dfrac{A^{0,8}}{K^{0,8}}=0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{K^{0,8}}{A^{0,8}}=\lambda \end{array}\right\} \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{A^{0,2}}{K^{0,2}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{K^{0,8}}{A^{0,8}} \Rightarrow K=\dfrac{1}{2}A$$

$$10.000=100A^{0,8}K^{0,2} \Rightarrow 10.000=100A^{0,8}\cdot\left(\frac{1}{2}A\right)^{0,2} \Rightarrow A=\frac{10.000}{100\cdot 0,5^{0,2}}=114,87 \Rightarrow K=57,43$$

$$K(114,87/57,43)=20\cdot 114,87+10\cdot 57,43=2.871,70\,[GE]$$

Lösung zu b)

$$L(A,K,\lambda) = 100A^{0,8}K^{0,2} + \lambda(6000 - 20A - 10K)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_A(A,K,\lambda) = 80 \cdot \frac{K^{0,2}}{A^{0,2}} - 20\lambda = 0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{K^{0,2}}{A^{0,2}} = \lambda \\ L_K(A,K,\lambda) = 20 \cdot \frac{A^{0,8}}{K^{0,8}} - 10\lambda = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{A^{0,8}}{K^{0,8}} = \lambda \end{array}\right\} 4 \cdot \frac{K^{0,2}}{A^{0,2}} = 2 \cdot \frac{A^{0,8}}{K^{0,8}} \Rightarrow K = \frac{1}{2}A$$

$$6000 = 20A + 10K \Rightarrow 6000 = 20A + 10 \cdot \frac{1}{2}A \Rightarrow A = 240 \Rightarrow K = 120$$

$$q(240/120) = 100 \cdot 240^{0,8} \cdot 120^{0,2} = 20.893,21[ME]$$

8.) Gegeben seien die Produktionsfunktion $q(r_1,r_2,r_3) = 10\ r_1^{0,2}\ r_2^{0,3}\ r_3^{0,5}$ sowie die Faktorpreise k_1 = 80 GE, k_2 = 600 GE und k_3 = 100 GE.

a) Man ermittle die kostengünstigste Inputkombination bei einem Produktionsniveau von q = 64 Mengeneinheiten.

b) Wie hoch ist der Output bei einem Budget von K = 4.000 Geldeinheiten?

9.) Das Weingut Gläser & Guckelsberger setzt zur Düngung seiner Weinstöcke für die bekannte Spätlese „Eulerscher Weingeist“ drei verschiedene Düngemittelsorten ein:
Sorte A zum Einkaufspreis von 3 €/kg, Sorte B zu 6 €/kg und Sorte C zu 12 €/kg.
Der jährliche Weinertrag orientiert sich an folgender Produktionsfunktion:

$$E(a,b,c) = 5.000 + 20a + 45b + 40c + ac + 4bc - a^2 - 2b^2 - c^2 \quad \text{, mit } a,b,c \geq 0.$$

Pro Jahr will das Weingut 1.200 DM für alle Düngemittel zusammen ausgeben.
Außerdem dürfen wegen schädlicher chemischer Reaktionen die Sorten A und B nur im Mengenverhältnis 2 : 1 eingesetzt werden.

a) Bei welchem Düngemitteleinsatz erzielen Gläser & Guckelsberger unter Beachtung der Restriktionen den maximalen Ernteertrag?

b) Gibt es ein Maximum ohne Berücksichtigung der Restriktionen?
Wie groß wäre der maximale Ertrag

10.) Der Student Zwerg-Nase muss unbedingt seinen Kenntnisstand in Mathematik verbessern. Sein Wissensstand W (gemessen in Wissenseinheiten WE) ist durch eine Funktion vorgegeben mit den Faktoren t (= Anzahl der bis zur Prüfung aufgewendeten Lerntage zu je 8 Lernstunden) und m (= Menge der Wunderdroge Placebonia, die übrigens nicht auf der Klausur-Dopingliste steht:

$W(m,t) = 160 + 6m + 9t - 0{,}25m^2 - 0{,}20t^2$, mit $m,t \geq 0$.

Jeder Lerntag verursacht Zwerg-Nase 80 € an kalkulatorischen Kosten, denn soviel könnte er als Türsteher bei der berühmten Diskothek

„Rasch & Ruh - Morgens geschlossen, mittags zu“

verdienen, die Wunderdroge kostet 120 $^{€}/_{\text{Gramm}}$.

a) Wie lange sollte Zwerg-Nase lernen und wieviel vom Dopingmittel konsumieren, damit sein Wissensstand in Mathematik maximal ist?
Dabei ist davon auszugehen, dass bei ihm noch nicht Hopfen und Malz verloren ist!

$$W(m,t) = 160 + 6m + 9t - 0{,}25m^2 - 0{,}2t^2$$

$$W_m(m,t) = 6 - 0{,}5m = 0 \quad \rightarrow \quad m = 12$$

$$W_t(m,t) = 9 - 0{,}4t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 22{,}5$$

$$H(W) = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \left\} \begin{matrix} W_{m,m} = -0{,}5 < 0 \\ Det(H) = 0{,}2 \end{matrix} \right\}$$

$$\rightarrow \quad neg.\,definit \quad \rightarrow \quad Max$$

b) Wie soll Zwerg-Nase Lernzeit und Wunderdroge kombinieren, wenn er insgesamt 2.680 € investieren möchte.

$$L(m,t,\lambda)=160+6m+9t-0,25m^2-0,2t^2+\lambda(2680-120m-80t)$$

$$L_m(m,t,\lambda)=6-0,5m-120\lambda=0 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{20}-\frac{1}{240}m=\lambda$$

$$L_t(m,t,\lambda)=9-0,4t-80\lambda=0 \quad\rightarrow\quad \frac{9}{80}-\frac{1}{200}t=\lambda$$

$$\xrightarrow{\textit{Austauschverhältnis}} \quad \frac{1}{20}-\frac{1}{240}m=\frac{9}{80}-\frac{1}{200}t \quad\rightarrow\quad m=\frac{6}{5}t-15$$

$$\xrightarrow{\textit{in NB}} \quad 2680=120m+80t \quad\rightarrow\quad 2680=120\left(\frac{6}{5}t-15\right)+80t$$

$$\rightarrow\quad 2680=144t-1800+80t \quad\rightarrow\quad 4480=224t \quad\rightarrow\quad t=20 \quad\rightarrow\quad m=9$$

$$H=\begin{pmatrix} 0 & -120 & -80 \\ -120 & -0,5 & 0 \\ -80 & 0 & -0,4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\quad Det(H)=\begin{vmatrix} 0 & -120 & -80 \\ -120 & -0,5 & 0 \\ -80 & 0 & -0,4 \end{vmatrix}=0+0+0-(-3200)-0-(-5760)=8960$$

$$\rightarrow\quad \textit{Maximum wegen Bed.}\,(-1)^n=(-1)^2=1>0\,[\textit{positiv}]$$