Übungsblatt: Partielle Differentiation und Extrema o. NB

Mathematik
Jürgen Meisel

(A) Bestimmen Sie die partielle Ableitung 1. Ordnung zu folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = x^3 + xy + y^3$

b) $f(x,y) = x^2 y^4$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{1}{4} x^{0,2} y^{0,8}$

e) $f(x,y) = e^{2xy} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$

(B) Bilden Sie die ersten partiellen Ableitungen

1.) $f(x,y) = (x-3)^2 + 2xy^2 - 16$

2.) $f(x,y) = 3x^2y^3 + 4xy + x^2e^{7y}$

3.) $f(x,y) = \left(\sqrt{xy}\right)^3 + xy^2 \cdot (x-y)$

4.) $f(x,y) = 3x^2 - 4y^2 + 5xy + 4y$

5.) $f(x,y) = \dfrac{5x}{y^2} \cdot e^{x+y}$

6.) $f(x,y) = \dfrac{x^4 - 3x^2y}{3x + 2y^2}$

7.) $f(x,y) = 5x^2y^4 + 8\dfrac{y^2}{x^5}$

8.) $f(x,y) = x^2 \cdot e^{4x+5y}$

9.) $f(x,y) = x^2 \cdot \ln(x \cdot y) - e^{-2xy}$

10.) $f(x,y) = 4x^{\alpha} y^{(1-\alpha)}$

11.) $f(x,y) = \left(x^3y^2\right)^y$

12.) $f(x,y) = 2y^{3x} \cdot \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(C) Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen Extremwerte besitzen

a) $f(x,y) = 2x^3 - 24x - 18y + 3y^2$

b) $f(x,y) = 64 - 2x^2 - 3x - y + 3y^2$

c) $f(x,y) = 2x^2 + 2 + 4y^2 - y$

d) $f(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + y^3 - 12y$

e) $f(x,y) = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - 36x$

(D) Ermitteln Sie die stationären Stellen und prüfen Sie auf Extrema

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 2y + 3$

b) $f(x,y) = x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + 2x + 4y - 7$

c) $f(x,y) = y^3 - 3x^2y$

d) $f(x,y) = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9x + 1$

e) $f(x,y) = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - 36x$

f) $f(x,y) = x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + 2x + 4y - 7$

(E) Auf einer gegebenen landwirtschaftlichen Fläche sind x Mengeneinheiten eines Mineraldüngers und y Mengeneinheiten eines Kunstdüngers zur Erreichung eines Produktionszieles $f(x,y)$ einzusetzen.

Die Produktionsfunktion lautet: $f(x,y) \quad = \quad 240 + 4x + 10y - x^2 + 3xy - \frac{5}{2}y^2$.

Bei welcher Düngereinsatzkombination ergibt sich ein Produktionsmaximum?

(F) Eine Ackerfläche wird mit Getreide bestellt. Zuvor wird Kunstdünger der Sorte S1 in x Mengeneinheiten, der Sorte S2 in y Mengeneinheiten und der Sorte S3 in z Mengeneinheiten ausgestreut. Aus langjähriger Erfahrung weiß der Landwirt, dass der Ertrag in Abhängigkeit der Düngung durch folgende Funktion wiedergegeben wird:

$$f(x,y,z) \quad = \quad 490 + 2x + 2y - \frac{9}{2}x^2 - y^2 - \frac{1}{2}z^2 + 3xy + 2xz$$

Wie muss der Landwirt den Acker düngen, damit er einen maximalen Ertrag erzielt? Wie hoch ist der maximal erreichbare Ertrag?

(G) Ermitteln Sie die stationären Stellen und prüfen Sie, ob es sich um Extremwerte handelt:

$$u(a,b,c,d) \quad = \quad a^4 - 4a^3 + bcd - 2cd - 2b - 4c - 8d + 1.$$

(H) Eine 2-Produkt-Unternehmung produziere nach der Gesamtkostenfunktion

$$K(x,y) \quad = \quad x^2 + 2y^2 - xy$$

Die Marktpreise der Güter seien exogen vorgegeben mit p_1 = 10 GE und p_2 = 5 GE *(=> Polypol).*

a) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.

b) Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Produktionsmengen, den maximalen Gesamtgewinn und zeigen Sie dass Ihr Ergebnis ein Maximum darstellt.

(I) Eine 3-Produkt-Unternehmung produziere nach der Gesamtkostenfunktion

$$K(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + yz + 100$$

Die Marktpreise der Güter seien exogen vorgegeben mit p_1 = 40 GE, p_2 = 50 GE und p_3 = 80 GE *(=> Polypol).*

a) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.

b) Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Produktionsmengen, den maximalen Gesamtgewinn und zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis ein Maximum darstellt.

(J) Von einer 2-Produkt-Unternehmung, die als monopolistischer Anbieter am Markt agiert, sind folgende Größen bekannt:

a) Gesamtkostenfunktion $K(x,y) = 0{,}5x^2 + xy + y^2 + 500.000$

Preis für Gut 1: $p_1(x,y) = 1.280 - 4x + y$

Preis für Gut 2: $p_2(x,y) = 2.360 + 2x - 3y$

b) Stückvariable Kosten: k_1 = 2 GE/ME und k_2 = 5 GE/ME

Nachfrage nach Gut 1: $x(p_1, p_2) = 600 - 50p_1 + 30p_2$

Nachfrage nach Gut 2: $y(p_1, p_2) = 800 + 10p_1 - 40p_2$

c) Gesamtkostenfunktion $K(x,y) = 2x^2 + xy + 3y^2$

Preis für Gut 1: $p_1(x,y) = 16 - 2x$

Preis für Gut 2: $p_2(x,y) = 12 - y$

d) Gesamtkostenfunktion $K(x,y) = 50x + 10y$

Preis für Gut 1: $p_1(x,y) = 400 - 2x + y$

Preis für Gut 2: $p_2(x,y) = 150 + 0{,}5x - 0{,}5y$

e) Gesamtkostenfunktion: $K(x,y) = x^2 + y^2$

Nachfrage nach Gut 1: $x(p_1, p_2) = 8 - 2p_1 + p_2$

Nachfrage nach Gut 2: $y(p_1, p_2) = 10 + p_1 - 3p_2$

(i) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.

(ii) Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Produktionsmengen bzw. die gewinnmaximalen Preise, den maximalen Gesamtgewinn und zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis ein Maximum darstellt.