(A) Bestimmen Sie die partielle Ableitung 1. Ordnung zu folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = x^3 + xy + y^3$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + y \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + 3y^2$$

b) $f(x,y) = x^2 y^4$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy^4 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4x^2 y^3$$

c) $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2} = x^2 \cdot y^{-2}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (-2) \cdot x^2 \cdot y^{-3} = (-2) \cdot \frac{x^2}{y^3}$$

d) $f(x,y) = \frac{1}{4} x^{0,2} y^{0,8}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{10} \cdot x^{-0,8} \cdot y^{0,8} = \frac{1}{10} \cdot \frac{y^{0,8}}{x^{0,8}} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{5} \cdot x^{0,2} \cdot y^{-0,2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^{0,2}}{y^{0,2}}$$

e) $f(x,y) = e^{2xy} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{2xy} \cdot 2y \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + e^{2xy} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = e^{2xy} \cdot \left(2y \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{2xy} \cdot 2x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + e^{2xy} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = e^{2xy} \cdot \left(2x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

(B) Bilden Sie die ersten partiellen Ableitungen

1.) $$f(x,y)=(x-3)^2+2xy^2-16$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2(x-3)+2y^2 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=4xy$$

2.) $$f(x,y)=3x^2y^3+4xy+x^2e^{7y}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=6xy^3+4y+2xe^{7y} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=9x^2y^2+4x+7x^2e^{7y}$$

3.) $$f(x,y)=\left(\sqrt{xy}\right)^3+xy^2\cdot(x-y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3\left(\sqrt{xy}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}+y^2\cdot(x-y)+x^2y \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3\left(\sqrt{xy}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}+2xy\cdot(x-y)-xy^2$$

4.) $$f(x,y)=3x^2-4y^2+5xy+4y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=6x+5y \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-8y+5x+4$$

5.) $$f(x,y)=\frac{5x}{y^2}\cdot e^{x+y}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{5}{y^2}\cdot e^{x+y}+\frac{5x}{y^2}\cdot e^{x+y}\cdot 1 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{10x}{y^3}\cdot e^{x+y}+\frac{5x}{y^2}\cdot e^{x+y}\cdot 1$$

6.) $$f(x,y)=\frac{x^4-3x^2y}{3x+2y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\left(4x^3-6xy\right)\left(3x+2y^2\right)-3\left(x^4-3x^2y\right)}{\left(3x+2y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{3x^2\left(3x+2y^2\right)-4y\left(x^4-3x^2y\right)}{\left(3x+2y^2\right)^2}$$

7.) $f\left(x,y\right)=5x^2y^4+8\dfrac{y^2}{x^5}$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=10xy^4-40\frac{y^2}{x^6} \qquad \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=20x^2y^3+16\frac{y}{x^5}$$

8.) $f\left(x,y\right)=x^2\cdot e^{4x+5y}$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=2x\cdot e^{4x+5y}+4x^2\cdot e^{4x+5y} \qquad \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=5x^2\cdot e^{4x+5y}$$

9.) $f\left(x,y\right)=x^2\cdot\ln\left(x\cdot y\right)-e^{-2xy}$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=2x\cdot\ln\left(x\cdot y\right)+x^2\cdot\frac{y}{x\cdot y}+2ye^{-2xy} \qquad \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=x^2\cdot\frac{x}{x\cdot y}+2xe^{-2xy}$$

10.) $f\left(x,y\right)=4x^{\alpha}y^{(1-\alpha)}$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=4\alpha x^{(\alpha-1)}y^{(1-\alpha)} \quad = \quad 4\alpha\frac{y^{(1-\alpha)}}{x^{(1-\alpha)}} \quad = \quad 4\alpha\left(\frac{y}{x}\right)^{(1-\alpha)}$$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=4\left(1-\alpha\right)x^{\alpha}y^{-\alpha} \quad = \quad 4\left(1-\alpha\right)\frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}} \quad = \quad 4\left(1-\alpha\right)\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}$$

11.) $f\left(x,y\right)=\left(x^3y^2\right)^y$

Umformung der Funktion zur Ermittlung der partiellen Ableitung nach x:

$$f\left(x,y\right)=\left(x^3y^2\right)^y=x^{3y}y^{2y}$$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} \quad = \quad 3y\,x^{3y-1}y^{2y} \quad = \quad 3x^{3y-1}y^{2y+1}$$

oder mit der Kettenregel: $f_x \quad = \quad y\left(x^3y^2\right)^{y-1}\cdot 3x^2y^2 \quad = \quad x^{3\cdot(y-1)}y^{2\cdot(y-1)}\cdot 3x^2y^3 \quad = \quad 3x^{3y-1}y^{2y+1}$

Umformung der Funktion zur Ermittlung der partiellen Ableitung nach y:

$$f\left(x,y\right)=\left(x^3y^2\right)^y=e^{\ln\left(x^3y^2\right)^y}=e^{y\cdot\ln\left(x^3y^2\right)}$$

$$f_y \quad = \quad e^{y\cdot\ln\left(x^3y^2\right)}\cdot\left[1\cdot\ln\left(x^3y^2\right)+y\cdot\frac{1}{x^3y^2}\cdot 2x^3y\right] \quad = \quad e^{y\cdot\ln\left(x^3y^2\right)}\cdot\left[\ln\left(x^3y^2\right)+2\right]$$

12.) $f(x,y) = 2y^{3x} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

Umformung zur Ermittlung der partiellen Ableitung nach x:

$$f(x,y) = 2y^{3x} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \cdot e^{\ln y^{3x}} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \cdot e^{3x \cdot \ln y} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2 \cdot e^{3x \cdot \ln y} \cdot 3\ln y \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) + 2 \cdot e^{3x \cdot \ln y} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = 2 \cdot \left[y^{3x} \cdot 3\ln y \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) + y^{3x} \cdot \frac{1}{x} \right]$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2 \cdot 3xy^{3x-1} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) + 2y^{3x} \cdot \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = 6xy^{3x-1} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2y^{3x-1} = 2y^{3x-1} \cdot \left[3x \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) - 1 \right]$$

(C) Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen Extremwerte besitzen

a) $f(x,y) = 2x^3 - 24x - 18y + 3y^2$

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^3 - 24x - 18y + 3y^2 \\ f_x(x,y) &= 6x^2 - 24 = 0 \;\rightarrow\; x_{1/2} = \pm 2 \\ f_y(x,y) &= -18 + 6y \;\rightarrow\; y = 3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &S_1(2 \mid 3 \mid f_1) \\ &S_2(-2 \mid 3 \mid f_2) \end{aligned}$$

$Hesse-Matrix:$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1} H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{aligned} f_{xx} &= 24 > 0 \\ \det(H) &= 144 > 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} &\textit{positiv definit} \\ &Min(2 \mid 3 \mid -63) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{S_2} H_{S_2}(f) = \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{aligned} f_{xx} &= -24 < 0 \\ \det(H) &= -144 < 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \textit{indefinit}: SP$$

b) $f(x,y) = 64 - 2x^2 - 3x - y + 3y^2$

$$f(x,y) = 64 - 2x^2 - 3x - y + 3y^2$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= -4x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = -\frac{3}{4} \\ f_y(x,y) &= -1 + 6y = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{6} \end{aligned}\right\} S\left(-\frac{3}{4} \,\middle|\, \frac{1}{6} \,\middle|\, f\right)$$

$Hesse-Matrix:$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{S} H_S(f) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{aligned} f_{xx} &= -4 < 0 \\ \det(H) &= -24 < 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \textit{indefinit}: SP$$

c) $f(x,y) = 2x^2+2+4y^2-y$

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^2+2+4y^2-y \\ f_x(x,y) &= 4x=0 \quad\rightarrow\quad x=0 \\ f_y(x,y) &= 8y-1=0 \quad\rightarrow\quad y=\frac{1}{8} \end{aligned}\right\} S\left(0 \;\middle|\; \frac{1}{8} \;\middle|\; f\right)$$

$Hesse-Matrix:$

$$H(f)=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{S} H_S(f)=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} f_{xx}=4>0 \\ \det(H)=32>0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} \textit{positiv definit} \\ Min\left(0 \;\middle|\; \frac{1}{8} \;\middle|\; \frac{15}{16}\right) \end{matrix}$$

d) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3-x^2+y^3-12y$

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3-x^2+y^3-12y$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= x^2-2x=0 \quad\rightarrow\quad x_1=0 \wedge x_2=2 \\ f_y(x,y) &= 3y^2-12=0 \quad\rightarrow\quad y_{1/2}=\pm 2 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} S_1(0 \mid 2 \mid f_1) & S_3(2 \mid 2 \mid f_3) \\ S_2(0 \mid -2 \mid f_2) & S_4(2 \mid -2 \mid f_4) \end{matrix}$$

$Hesse-Matrix:$

$$H(f)=\begin{pmatrix} 2x-2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1} H_{S_1}(f)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} f_{xx}=-2<0 \\ \det(H)=-24<0 \end{matrix}\right\} \rightarrow indefinit: SP$$

$$\xrightarrow{S_2} H_{S_2}(f)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} f_{xx}=-2<0 \\ \det(H)=24>0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} \textit{negativ definit} \\ Max(0 \mid -2 \mid 16) \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{S_3} H_{S_3}(f)=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} f_{xx}=4>0 \\ \det(H)=48>0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} \textit{positiv definit} \\ Min(2 \mid 2 \mid f_3) \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{S_4} H_{S_4}(f)=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} f_{xx}=4>0 \\ \det(H)=-48<0 \end{matrix}\right\} \rightarrow indefinit: SP$$

e) $f(x,y) = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - 36x$

$$f(x,y) = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - 36x$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 9x^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 2 \\ f_y(x,y) &= 3y^2 - 6y = 0 \quad \rightarrow \quad y_1 = 0 \wedge y_2 = 2 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} S_1(2 \mid 0 \mid f_1) & S_3(-2 \mid 0 \mid f_3) \\ S_2(2 \mid 2 \mid f_2) & S_4(-2 \mid 2 \mid f_4) \end{matrix}$$

$Hesse-Matrix:$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 18x & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1} \quad H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} f_{xx} = 36 > 0 \\ \det(H) = -216 < 0 \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad indefinit: SP$$

$$\xrightarrow{S_2} \quad H_{S_2}(f) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} f_{xx} = 36 > 0 \\ \det(H) = 216 > 0 \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} positiv\ definit \\ Min(2 \mid 2 \mid -52) \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{S_3} \quad H_{S_3}(f) = \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} f_{xx} = -36 < 0 \\ \det(H) = 216 > 0 \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} negativ\ definit \\ Max(-2 \mid 0 \mid 48) \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{S_4} \quad H_{S_4}(f) = \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} f_{xx} = -36 < 0 \\ \det(H) = -216 < 0 \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad indefinit: SP$$

(D) Ermitteln Sie die stationären Stellen und prüfen Sie die Funktionen auf Extrema

a) $$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+2xy+y^2+4x+2y+3$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=x+2y+4 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} x=-4-2y$$

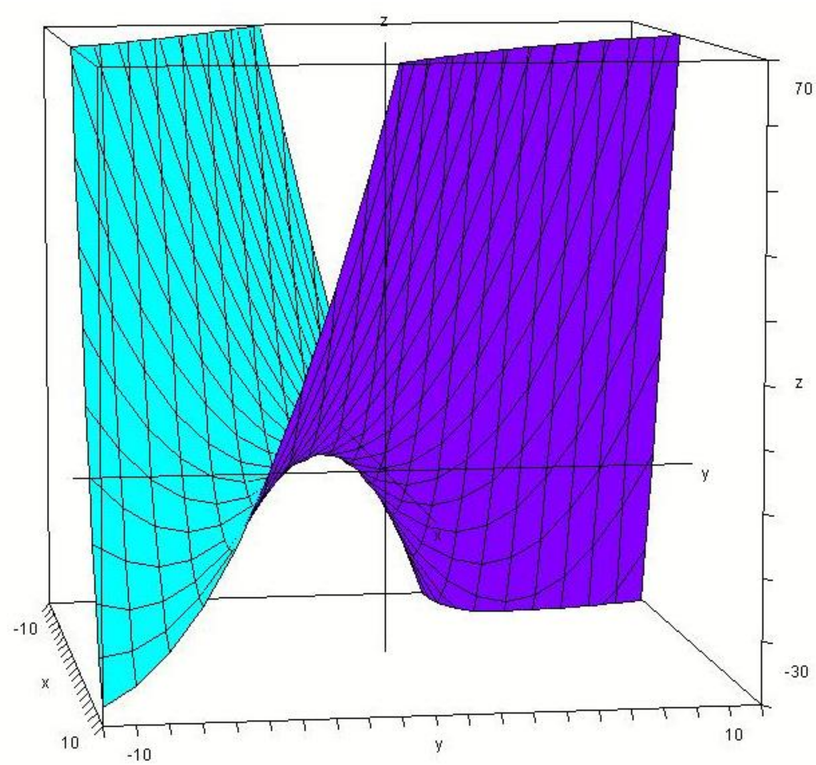
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2x+2y+2 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} x=-1-y$$

$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} y=-3 \xrightarrow{\text{einsetzen}} x=2$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H(f)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Auswertung}} \begin{cases} f_{xx}=1>0 \\ Det(H(f))=-2<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ kein Extremwert, sondern Sattelpunkt



b) $$f\left(x,y\right)=x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2+2x+4y-7$$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=2x+2y+2 \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} \quad x=-1-y$$

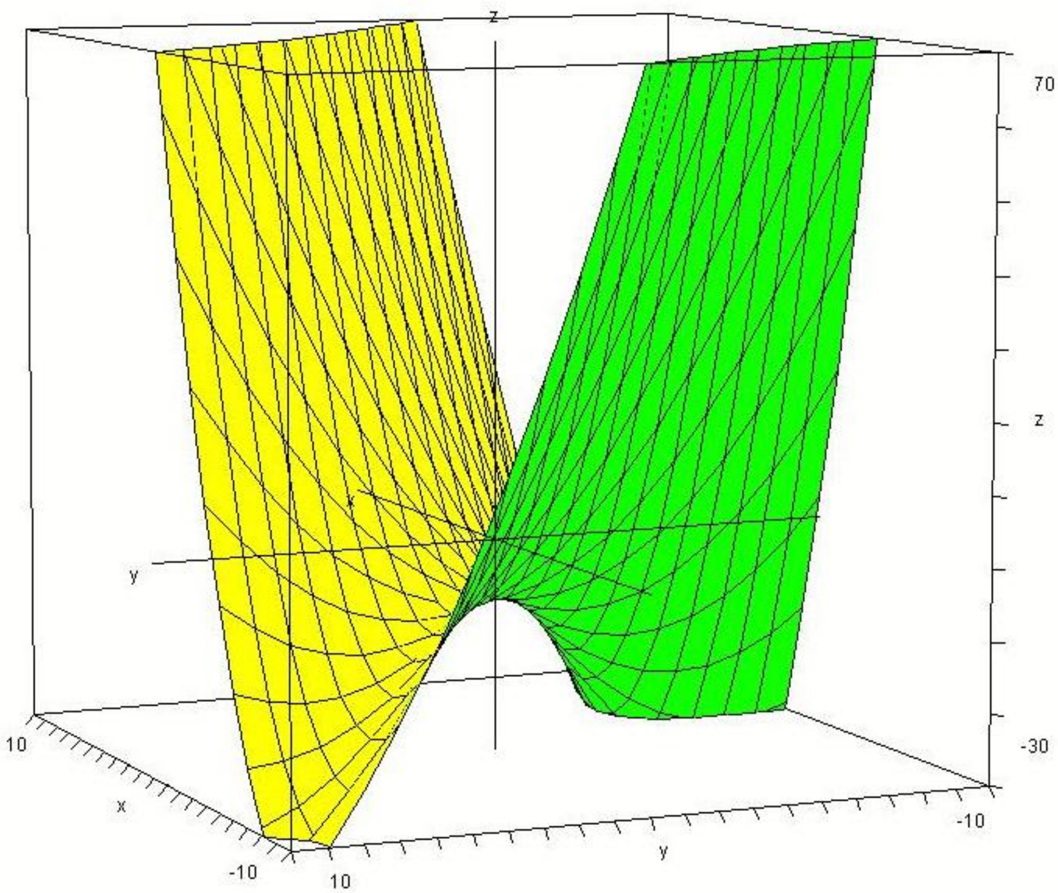
$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=2x+y+4 \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} \quad x=-2-\frac{1}{2}y$$

$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} \quad y=2 \quad \xrightarrow{\text{einsetzen}} \quad x=-3$$

$Hesse-Matrix:$

$$H\left(f\right)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{Auswertung}} \quad \begin{cases} f_{xx}=2>0 \\ Det\left(H\left(f\right)\right)=-2<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ kein Extremwert, sondern Sattelpunkt



c) $f(x,y) = y^3 - 3x^2 y$

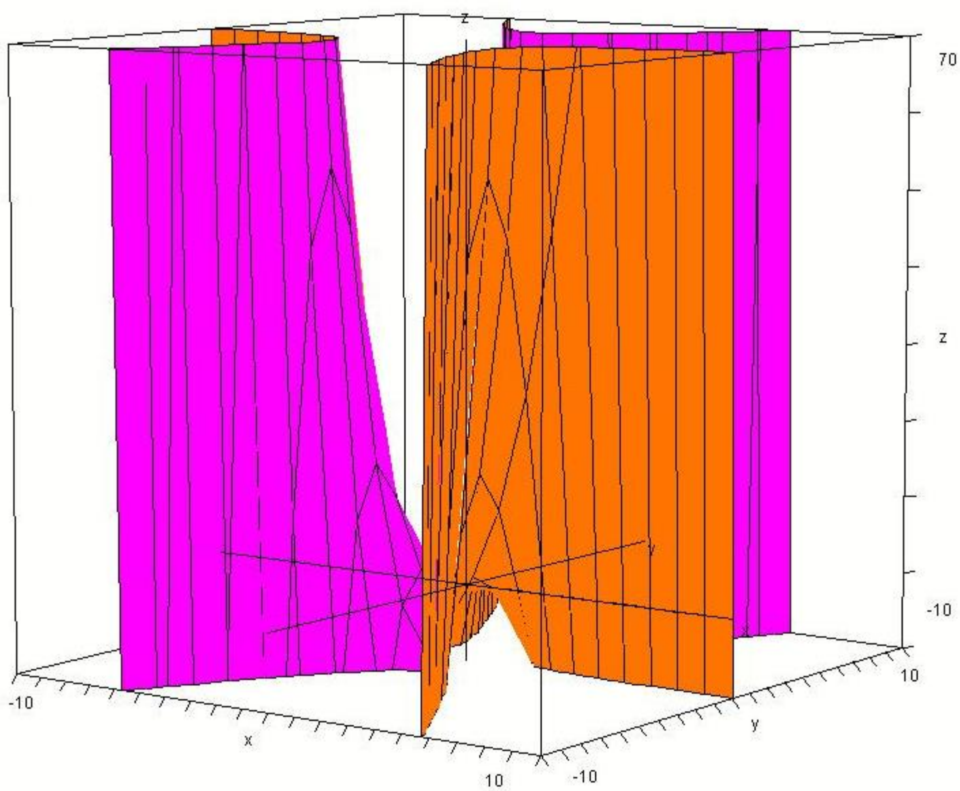
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -6xy \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach } x;y \text{ auflösen}} x = y = 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach } x \text{ auflösen}} x^2 = y^2$$

$Hesse-Matrix:$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -6y & -6x \\ -6x & 6y \end{pmatrix} \xrightarrow{x=0 \text{ und } y=0 \text{ einsetzen}} H(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f_{xx} = 0 \\ Det(H(f)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{semidefinit} \Rightarrow \text{keine Aussage möglich}$$



d) $f(x,y) = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9x + 1$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x + 3y - 9 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x + 6y \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} x = -2y$$

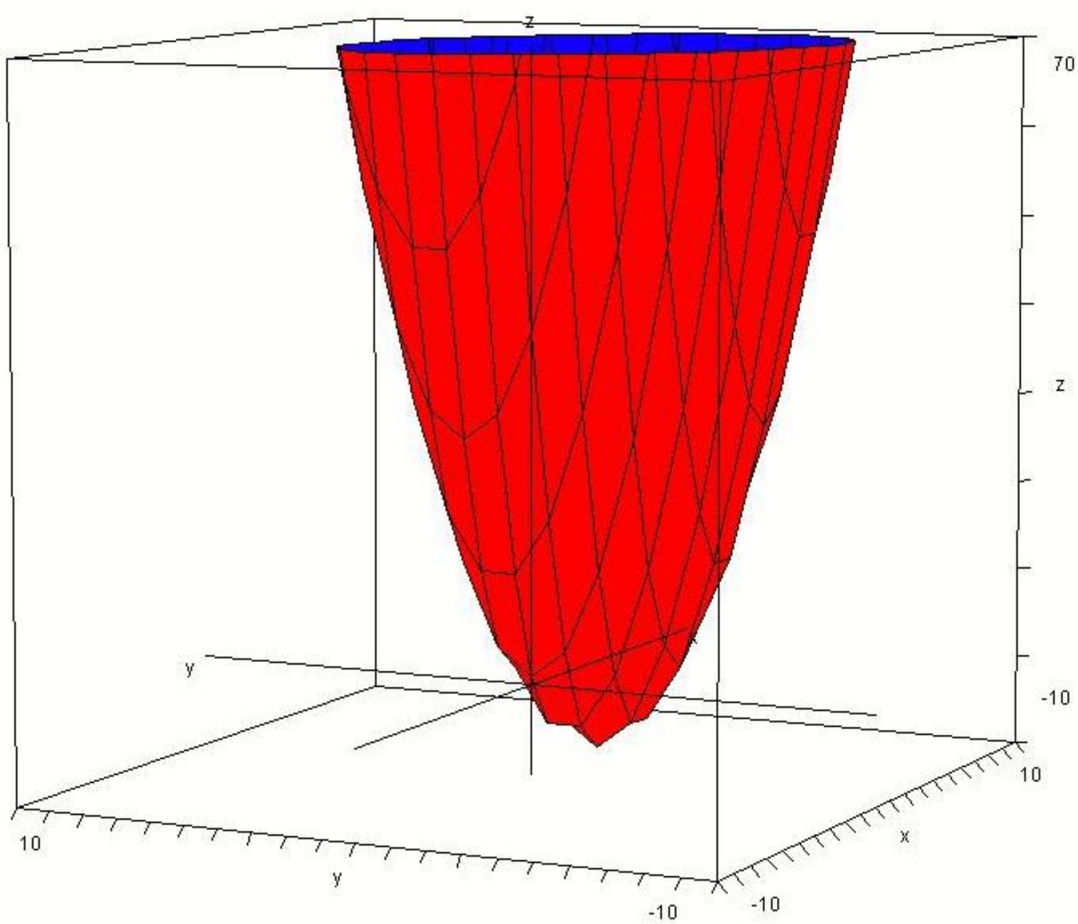
$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} y = -1 \xrightarrow{\text{einsetzen}} x = 2$$

Hesse – Matrix:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Auswertung}} \begin{cases} f_{xx} = 6 > 0 \\ Det(H(f)) = 27 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ positiv definit $\Rightarrow$ Minimum

$\Rightarrow$ $\mathrm{Min}(2 \mid -1 \mid -8)$



e) $f\left(x,y\right)=3x^3+y^3-3y^2-36x$ Lösung vgl. C

f) $f\left(x,y\right)=x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2+2x+4y-7$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=2x+2y+2 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} x=-y-1$$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=2x+y+4 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} x=-\frac{1}{2}y-2$$

$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} -y-1=-\frac{1}{2}y-2 \rightarrow y=2 \xrightarrow{\text{einsetzen}} x=-3$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H\left(f\right)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Auswertung}} \begin{cases} f_{xx}=2>0 \\ Det\left(H\left(f\right)\right)=-2<0 \end{cases} \rightarrow indefinit:SP$$

(E) Auf einer gegebenen landwirtschaftlichen Fläche sind x Mengeneinheiten eines Mineraldüngers und y Mengeneinheiten eines Kunstdüngers zur Erreichung eines Produktionszieles $f\left(x,y\right)$ einzusetzen.

Die Produktionsfunktion lautet: $f\left(x,y\right) = 240+4x+10y-x^2+3xy-\frac{5}{2}y^2$.

Bei welcher Düngereinsatzkombination ergibt sich ein Produktionsmaximum?

Lösung:

$$f\left(x,y\right) = 240+4x+10y-x^2+3xy-\frac{5}{2}y^2$$

$$f_x=4-2x+3y \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} x=2+\frac{3}{2}y$$

$$f_y=10+3x-5y \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} x=\frac{5}{3}y-\frac{10}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} 2+\frac{3}{2}y=\frac{5}{3}y-\frac{10}{3} \rightarrow y=32 \xrightarrow{\text{einsetzen}} x=50$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H\left(f\right)=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Auswertung}} \begin{cases} f_{xx}=-2<0 \\ Det\left(H\left(f\right)\right)=1>0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \textit{negativ definit} \\ Max\left(50 \mid 32 \mid 500\right) \end{matrix}$$

(F) Eine Ackerfläche wird mit Getreide bestellt. Zuvor wird Kunstdünger der Sorte S1 in x Mengeneinheiten, der Sorte S2 in y Mengeneinheiten und der Sorte S3 in z Mengeneinheiten ausgestreut. Aus langjähriger Erfahrung weiß der Landwirt, dass der Ertrag in Abhängigkeit der Düngung durch folgende Funktion wiedergegeben wird:

$$f(x,y,z) = 490+2x+2y-\frac{9}{2}x^2-y^2-\frac{1}{2}z^2+3xy+2xz$$

Wie muss der Landwirt den Acker düngen, damit er einen maximalen Ertrag erzielt?
Wie hoch ist der maximal erreichbare Ertrag?

Lösung:

$$f(x,y,z) = 490+2x+2y-\frac{9}{2}x^2-y^2-\frac{1}{2}z^2+3xy+2xz$$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2-9x+3y+2z \overset{!}{=} 0 \\ f_y &= 2-2y+3x \overset{!}{=} 0 \\ f_z &= -z+2x \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Auswertung} \begin{aligned} &(1) \quad f_{xx} = -9 < 0 \\ &(2) \quad \det\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 9 > 0 \\ &(3) \quad \det\begin{pmatrix} -9 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad negativ\ definit \quad \rightarrow \quad Max(10 \quad 16 \quad 20 \quad 516)$$

(G) Ermitteln Sie die stationären Stellen und prüfen Sie, ob es sich um Extremwerte handelt:

$$u(a,b,c,d) = a^4 - 4a^3 + bcd - 2cd - 2b - 4c - 8d + 1.$$

Lösung:

$$u(a,b,c,d) = a^4 - 4a^3 + bcd - 2cd - 2b - 4c - 8d + 1$$

4 erste partielle Ableitungen:

$u_a = 4a^3 - 12a^2 = 0 \qquad u_b = cd - 2 = 0 \qquad u_c = bd - 2d - 4 = 0 \qquad u_d = bc - 2c - 8 = 0$

$\rightarrow$ 4 stationäre Stellen: $S_i(a \quad b \quad c \quad d \quad f_i)$

$S_1(0 \quad 6 \quad 2 \quad 1 \quad f_1) \quad S_2(0 \quad -2 \quad -2 \quad -1 \quad f_2) \quad S_3(3 \quad 6 \quad 2 \quad 1 \quad f_3) \quad S_4(3 \quad -2 \quad -2 \quad -1 \quad f_4)$

$Hesse-Matrix:$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 12a^2 - 24a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & d & 0 & b-2 \\ 0 & c & b-2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Auswertung}$$

S_1 und S_2 bieten keinen Ansatz: für die Det.-Werte der Hauptminoren von $\mathrm{Det}(H_i) = 0$ gilt: Semidefinit

S_3:

$$\begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} \det(H_1) = 36 > 0 \\ \det(H_2) = 0 \\ \det(H_3) = -36 < 0 \\ \det(H_4) = 576 > 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow indefinit: Sattelpunkt$$

S_4:

$$\begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} \det(H_1) = 36 > 0 \\ \det(H_2) = 0 \\ \det(H_3) = -36 < 0 \\ \det(H_4) = -576 > 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow indefinit: Sattelpunkt$$

(H) Eine 2-Produkt-Unternehmung produziere nach der Gesamtkostenfunktion

$$K(x,y) \quad = \quad x^2 + 2y^2 - xy$$

Die Marktpreise der Güter seien exogen vorgegeben mit p_1 = 10 GE und p_2 = 5 GE *(=> Polypol).*

a) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.

b) Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Produktionsmengen, den maximalen Gesamtgewinn und zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis ein Maximum darstellt.

Lösung:

$$Gewinnfunktion: \quad g(x,y) \quad = \quad 10x + 5y - \left(x^2 + 2y^2 - xy\right) \quad = \quad 10x + 5y - x^2 - 2y^2 + xy$$

$$g_x = 10 - 2x + y \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} \quad x = \frac{1}{2}y + 5$$

$$g_y = 5 - 4y + x \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} \quad x = 4y - 5$$

$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} \quad \frac{1}{2}y + 5 = 4y - 5 \quad \to \quad y = \frac{20}{7} \approx 2{,}86 \quad \xrightarrow{\text{einsetzen}} \quad x = \frac{45}{7} \approx 6{,}43$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{Auswertung}} \quad \begin{cases} f_{xx} = -2 < 0 \\ Det\left(H(f)\right) = 7 > 0 \end{cases} \quad \to \quad \overset{\textit{negativ definit}}{Max\left(\frac{45}{7} \;\middle|\; \frac{20}{7} \;\middle|\; \frac{275}{7}\right)}$$

$$\to \quad Max\left(6{,}43 \mid 2{,}86 \mid 39{,}29\right)$$

(I) Eine 3-Produkt-Unternehmung produziere nach der Gesamtkostenfunktion

$$K(x,y,z) \quad = \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + yz + 100$$

Die Marktpreise der Güter seien exogen vorgegeben mit p_1 = 40 GE, p_2 = 50 GE und p_3 = 80 GE *(=> Polypol).*

a) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.

b) Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Produktionsmengen, den maximalen Gesamtgewinn und zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis ein Maximum darstellt.

Lösung:

$$g(x,y,z) \quad = \quad 40x + 50y + 80z - x^2 - 2y^2 - 3z^2 - xy - yz - 100$$

$$\left.\begin{array}{l} g_x = 40 - 2x - y \overset{!}{=} 0 \\ g_y = 50 - 4y - x - z \overset{!}{=} 0 \\ g_z = 80 - 6z - y \overset{!}{=} 0 \end{array}\right\} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17{,}5 \\ 5 \\ 12{,}5 \end{pmatrix}$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{Auswertung}} \quad \begin{array}{ll} (1) & f_{xx} = -2 < 0 \\ (2) & \det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = 7 > 0 \end{array}$$

$$(3) \quad \det\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} = -48 + 0 + 0 - 0 - (-2) - (-6) = -40 < 0$$

$$\to \quad \textit{negativ definit} \quad \to \quad Max\left(17{,}5 \quad 5 \quad 12{,}5 \quad 875\right)$$

(J) Von einer 2-Produkt-Unternehmung, die als monopolistischer Anbieter am Markt agiert, sind folgende Größen bekannt:

a) Gesamtkostenfunktion $K(x,y) = 0{,}5x^2 + xy + y^2 + 500.000$

Preis für Gut 1: $p_1(x,y) = 1.280 - 4x + y$

Preis für Gut 2: $p_2(x,y) = 2.360 + 2x - 3y$

Lösung:

$$Gewinnfunktion: \quad g(x,y) = u(x,y) - K(x,y) = p_1(x,y)\cdot x + p_2(x,y)\cdot y - K(x,y)$$

$$g(x,y) = (1.280 - 4x + y)\cdot x + (2.360 + 2x - 3y)\cdot y - \left(0{,}5x^2 + xy + y^2 + 500.000\right)$$

$$g(x,y) = 1.280x - 4x^2 + xy + 2.360y + 2xy - 3y^2 - 0{,}5x^2 - xy - y^2 - 500.000$$

$$g(x,y) = 1.280x - 4{,}5x^2 + 2.360y + 2xy - 4y^2 - 500.000$$

$$\left.\begin{array}{l} g_x = 1.280 - 9x + 2y \overset{!}{=} 0 \\ g_y = 2.360 + 2x - 8y \overset{!}{=} 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 220 \quad \vee \quad y = 350$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{Auswertung} \begin{cases} f_{xx} = -9 < 0 \\ Det(H(f)) = 68 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} negativ\ definit \\ Max(220 \mid 350 \mid 53.800) \end{array}$$

b) Stückvariable Kosten: $k_1 = 2\ {}^{GE}/_{ME}$ und $k_2 = 5\ {}^{GE}/_{ME}$

Nachfrage nach Gut 1: $x(p_1, p_2) = 600 - 50p_1 + 30p_2$

Nachfrage nach Gut 2: $y(p_1, p_2) = 800 + 10p_1 - 40p_2$

Lösung:

Kommt noch

c) Gesamtkostenfunktion $K(x,y) = 2x^2 + xy + 3y^2$

Preis für Gut 1: $p_1(x,y) = 16 - 2x$ Preis für Gut 2: $p_2(x,y) = 12 - y$

Lösung:

$$Gewinnfunktion: \quad g(x,y) = u(x,y) - K(x,y) = p_1(x,y)\cdot x + p_2(x,y)\cdot y - K(x,y)$$

$$g(x,y) = (16-2x)\cdot x + (12-y)\cdot y - (2x^2 + xy + 3y^2)$$

$$g(x,y) = 16x - 2x^2 + 12y - y^2 - 2x^2 - xy - 3y^2$$

$$g(x,y) = 16x - 4x^2 + 12y - 5y^2 - xy$$

$$\left.\begin{aligned} g_x &= 16 - 8x - y \overset{!}{=} 0 \\ g_y &= 12 - x - 10y \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 1\frac{69}{79} \approx 1{,}873 \quad \vee \quad y = 1\frac{1}{79} \approx 1{,}013$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{Auswertung} \begin{cases} f_{xx} = -8 < 0 \\ Det(H(f)) = 79 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} negativ\ definit \\ Max(1{,}87 \mid 1{,}01 \mid 21{,}063) \end{matrix}$$

d) Gesamtkostenfunktion $K(x,y) = 50x + 10y$

Preis für Gut 1: $p_1(x,y) = 400 - 2x + y$ Preis für Gut 2: $p_2(x,y) = 150 + 0{,}5x - 0{,}5y$

Lösung:

$$Gewinnfunktion: \quad g(x,y) = u(x,y) - K(x,y) = p_1(x,y)\cdot x + p_2(x,y)\cdot y - K(x,y)$$

$$g(x,y) = (400 - 2x + y)\cdot x + (150 + 0{,}5x - 0{,}5y)\cdot y - (50x + 10y)$$

$$g(x,y) = 400x - 2x^2 + xy + 150y + 0{,}5xy - 0{,}5y^2 - 50x - 10y$$

$$g(x,y) = 350x - 2x^2 + 1{,}5xy + 140y - 0{,}5y^2$$

$$\left.\begin{aligned} g_x &= 350 - 4x + 1{,}5y \overset{!}{=} 0 \\ g_y &= 140 + 1{,}5x - y \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 320 \quad \vee \quad y = 620$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -4 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Auswertung} \begin{cases} f_{xx} = -4 < 0 \\ Det(H(f)) = 1{,}75 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} negativ\ definit \\ Max(320 \mid 620 \mid 99.400) \end{matrix}$$

e) Gesamtkostenfunktion: $K(x,y) = x^2 + y^2$

Nachfrage nach Gut 1: $x(p_1, p_2) = 8 - 2p_1 + p_2$

Nachfrage nach Gut 2: $y(p_1, p_2) = 10 + p_1 - 3p_2$

(i)	Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.
(ii)	Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Produktionsmengen bzw. die gewinnmaximalen Preise, den maximalen Gesamtgewinn und zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis ein Maximum darstellt.

Lösung:

Kommt noch