

Funktionen mit mehreren Variablen

Definition für zwei unabhängige Variablen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad P(x, y, f(x, y))$$

Ableitungen:

Partielle Ableitungen:

Ableitung nach einer Variablen, während die übrigen Variablen wie Konstanten gesehen werden (ihren Wert nicht verändern) => Ceteris Paribus-Bedingung

Eine Einflussgröße (=Variable) wird verändert, die anderen Größen (=Variablen) bleiben gleich/unverändert.

Schreibweise der ersten partiellen Ableitung(en):

1. Partielle Ableitung nach x => $f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad f_x(x, y) = 2x + 0$

1. Partielle Ableitung nach y => $f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad f_y(x, y) = 0 + 2y$

Beispiel 1:

Funktion: $f(x, y) = 2x^4 \cdot y^3 + 4x - 5y$

Partielle Ableitungen: $f_x(x, y) = ??? \quad f_y(x, y) = ???$

Beispiel 2:

Funktion: $f(x, y, z) = \frac{2}{3}x^3 \cdot y^2 \cdot z + 4xz^2 - 5y^1x^5 + yz$

Partielle Ableitungen:

$f_x(x, y, z) = ??? \quad f_y(x, y, z) = ??? \quad f_z(x, y, z) = ???$

Beispiel 3:

Funktion: $f(x, y) = 2x^3 \cdot y^2 + 4yx - 5y^2x^7 + 4x - 8y + 10$

Partielle Ableitungen: $f_x(x, y) = ??? \quad f_y(x, y) = ???$

Beispiel 4:

Funktion: $f(x, y) = x^k y^m - 4x^t + 5y^2$

Partielle Ableitungen: $f_x(x, y) = ??? \quad f_y(x, y) = ???$

Beispiel 5:

Funktion: $f(x, y) = x^\alpha y^\beta - 4x^{5k} + \frac{1}{2}y^{4k}$

Partielle Ableitungen: $f_x(x, y) = ??? \quad f_y(x, y) = ???$

2. Partielle Ableitung => Schreibweise:

2. Partielle Ableitung nach x:

Aus der ersten partiellen Ableitung nach x $\left[\rightarrow f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right]$ folgt nun:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial x} \quad \text{und} \quad f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

2. Partielle Ableitung nach y:

Aus der ersten partiellen Ableitung nach y $\left[\rightarrow f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]$ folgt nun:

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial y} \quad \text{und} \quad f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

Idee: Ableitungstabelle / Ableitungsmatrix

Funktion mit 2 Variablen: $f(x, y)$

$\xrightarrow{\text{1. Part. Ableitung}}$ $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$

$\xrightarrow{\text{2. Part. Ableitung}}$ Ableitungsmatrix: Hesse – Matrix

	∂x	∂y
f_x	f_{xx}	f_{xy}
f_y	f_{yx}	f_{yy}

Beispiel: $f(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^3$

$$f_x(x, y) = ???$$

$$f_y(x, y) = ???$$

	∂x	∂y
f_x	$f_{xx} = ???$	$f_{xy} = ???$
f_y	$f_{yx} = ???$	$f_{yy} = ???$

Ermittlung von Extrema bei Funktionen mit mehreren Variablen:

Schritt 1: Bilden der ersten partiellen Ableitungen

Schritt 2: Stationäre Stelle(n) berechnen $\Rightarrow f_x(x, y) = 0$ und $f_y(x, y) = 0 \rightarrow S(x, y, f)$

Schritt 3: Prüfen der stationären Stelle mittels der Hesse-Matrix (Matrix der 2. Partiiellen Ableitungen)

Beispiel: $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 3y$

Schritt 1: Bilden der ersten partiellen Ableitungen

$$f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 3y \Rightarrow f_x(x, y) = 2x - 4 \text{ und } f_y(x, y) = 2y - 3$$

Schritt 2: Stationäre Stelle(n) berechnen $\Rightarrow f_x(x, y) = 0$ und $f_y(x, y) = 0 \rightarrow S(x, y, f)$

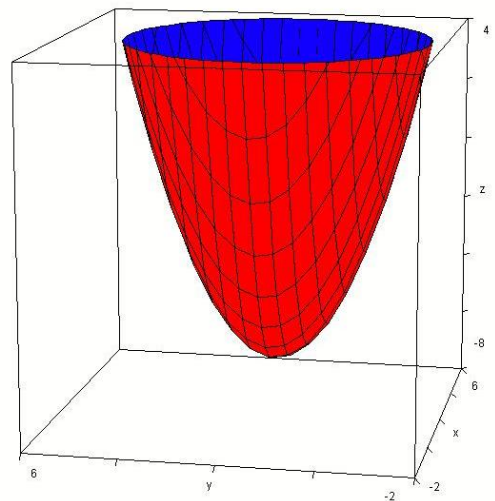
$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \\ \text{und} \\ f_y(x, y) = 2y - 3 = 0 \rightarrow y = 1,5 \end{array} \right\} S(2, 1,5, f)$$

Schritt 3: Prüfen der stationären Stelle mittels der Hesse-Matrix (Matrix der 2. Partiiellen Ableitungen)

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Auswertung:

$$\left. \begin{array}{l} (1) f_{xx} = 2 > 0 \\ (2) \det(H) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 0 = 4 > 0 \end{array} \right\} \text{positiv definit} \\ \rightarrow \text{Minimum}(2, 1,5, -6,25)$$



Andere Fälle der Auswertung:

Fall: Maximum

$$\left. \begin{array}{l} (1) f_{xx} < 0 \\ (2) \det(H) > 0 \end{array} \right\} \text{negativ definit} \rightarrow \text{Maximum}$$

Fall: Sattelpunkt

$$\left. \begin{array}{l} (1) f_{xx} \neq 0 \\ (2) \det(H) < 0 \end{array} \right\} \text{indefinit} \rightarrow \text{Sattelpunkt}$$