Funktionen mit mehreren Variablen

Definition für zwei unabhängige Variablen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x \quad y) = x^2 + y^2 \qquad => \qquad P(x \quad y \quad f(x \quad y))$$

Ableitungen:

Partielle Ableitungen:
Ableitung nach einer Variablen, während die übrigen Variablen wie Konstanten gesehen werden (ihren Wert nicht verändern) => Ceteris Paribus-Bedingung
Eine Einflussgröße (=Variable) wird verändert, die anderen Größen (=Variablen) bleiben gleich/unverändert.

Schreibweise der ersten partiellen Ableitung(en):

1. Partielle Ableitung nach x => $f_x(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ $\qquad f_x(x,y) = 2x + 0$

1. Partielle Ableitung nach y => $f_y(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ $\qquad f_y(x,y) = 0 + 2y$

Beispiel 1:

$$Funktion: \quad f(x,y) = 2x^4 \cdot y^3 + 4x - 5y$$

$$Partielle\ Ableitungen: \quad f_x(x,y) = 8x^3 \cdot y^3 + 4 \qquad f_y(x,y) = 6x^4 \cdot y^2 - 5$$

Beispiel 2:

$$Funktion: \quad f(x,y,z) = \frac{2}{3}x^3 \cdot y^2 \cdot z + 4xz^2 - 5y^1x^5 + yz$$

$$Partielle\ Ableitungen:$$

$$f_x(x,y,z) = 2x^2 \cdot y^2 \cdot z + 4z^2 - 25yx^4 \qquad f_y(x,y,z) = \frac{4}{3}x^3 \cdot y \cdot z - 5x^5 + z \qquad f_z(x,y,z) = \frac{2}{3}x^3 \cdot y^2 + 8xz + y$$

Beispiel 3:

$$Funktion: \quad f(x,y) = 2x^3 \cdot y^2 + 4yx - 5y^2x^7 + 4x - 8y + 10$$

$$Partielle\ Ableitungen: \quad f_x(x,y) = 6x^2 \cdot y^2 + 4y - 35y^2x^6 + 4 \qquad f_y(x,y) = 4x^3 \cdot y + 4x - 10yx^7 - 8$$

Beispiel 4:

$$Funktion: \quad f(x,y) = x^k y^m - 4x^t + 5y^2$$

$$Partielle\ Ableitungen: \quad f_x(x,y) = kx^{k-1}y^m - 4tx^{t-1} \qquad f_y(x,y) = mx^k y^{m-1} + 10y$$

Beispiel 5:

$$Funktion: \quad f(x,y) = x^\alpha y^\beta - 4x^{5k} + \frac{1}{2}y^{4k}$$

$$Partielle\ Ableitungen: \quad f_x(x,y) = \alpha x^{\alpha-1}y^\beta - 20kx^{5k-1} \qquad f_y(x,y) = \beta x^\alpha y^{\beta-1} + 2ky^{4k-1}$$

2. Partielle Ableitung => Schreibweise:

2.Partielle Ableitung nach x:

Aus der ersten partiellen Ableitung nach x $\left[\rightarrow f_x(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]$ folgt nun:

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x} \quad und \quad f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

2.Partielle Ableitung nach y:

Aus der ersten partiellen Ableitung nach y $\left[\rightarrow f_y(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]$ folgt nun:

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y} \quad und \quad f_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

Idee: Ableitungstabelle / Ableitungsmatrix

$$Funktion\ mit\ 2\ Variablen: \quad f(x,y)$$

$$\xrightarrow{\text{1. Part. Ableitung}} \quad f_x(x,y) \quad und \quad f_y(x,y)$$

$$\xrightarrow{\text{2. Part. Ableitung}} \quad Ableitungsmatrix: Hesse-Matrix \quad \begin{array}{c|cc} & \partial x & \partial y \\ \hline f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{yx} & f_{yy} \end{array}$$

Beispiel: $$f(x,y)=x^2-4xy+5y^3$$

$$f_x(x,y)=2x-4y$$
$$f_y(x,y)=-4x+15y^2$$

$$\begin{array}{c|cc} & \partial x & \partial y \\ \hline f_x & f_{xx}=2 & f_{xy}=-4 \\ f_y & f_{yx}=-4 & f_{yy}=30y \end{array}$$

Ermittlung von Extrema bei Funktionen mit mehreren Variablen:

Schritt 1: Bilden der ersten partiellen Ableitungen

Schritt 2: Stationäre Stelle(n) berechnen => $f_x(x,y)=0 \quad und \quad f_y(x,y)=0 \quad \rightarrow \quad S(x \quad y \quad f)$

Schritt 3: Prüfen der stationären Stelle mittels der Hesse-Matrix (Matrix der 2. Partiellen Ableitungen)

Beispiel: $f(x,y)=x^2-4x+y^2-3y$

Schritt 1: Bilden der ersten partiellen Ableitungen

$$f(x,y)=x^2-4x+y^2-3y \quad => \quad f_x(x,y)=2x-4 \quad und \quad f_y(x,y)=2y-3$$

Schritt 2: Stationäre Stelle(n) berechnen => $f_x(x,y)=0 \quad und \quad f_y(x,y)=0 \quad \rightarrow \quad S(x \quad y \quad f)$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y)=2x-4=0 \quad \rightarrow \quad x=2 \\ und \\ f_y(x,y)=2y-3=0 \quad \rightarrow \quad y=1{,}5 \end{array}\right\} S(2 \quad 1{,}5 \quad f)$$

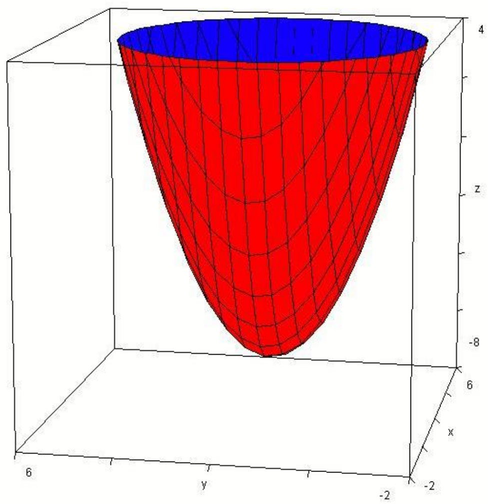
Schritt 3: Prüfen der stationären Stelle mittels der Hesse-Matrix (Matrix der 2. Partiellen Ableitungen)

$$H(f)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$Auswertung:$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \quad f_{xx}=2>0 \\ (2) \quad \det(H)=\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=4-0=4>0 \end{array}\right\} positiv\ definit$$

$$\rightarrow \quad Minimum(2 \quad 1{,}5 \quad -6{,}25)$$



Andere Fälle der Auswertung:

$Fall: \quad Maximum$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \quad f_{xx}<0 \\ (2) \quad \det(H)>0 \end{array}\right\} negativ\ definit \quad \rightarrow \quad Maximum$$

$Fall: \quad Sattelpunkt$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \quad f_{xx}\neq 0 \\ (2) \quad \det(H)<0 \end{array}\right\} indefinit \quad \rightarrow \quad Sattelpunkt$$