Vollständiges (totales) Differential:

Unter dem totalen Differential bzw. der vollständigen Ableitung ersteht man folgenden Ausdruck:

Unter dem vollständigen Differential $df\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\right)$ der differenzierbaren Funktion $f\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\right)$ versteht man die Summe aller partiellen Differentiale:

$$df\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot dx_n \quad = \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot dx_k$$

Das totale Differenzial wir auf Funktionen mit mehreren Variablen angewendet, um die tendenzielle Änderung der Funktion bei Änderung einer oder mehrerer Variablen zu ermitteln.

Daher ist das totale Differential ein Maß für die Veränderung der Funktion $f\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right)$, wenn man sich im Punkt $P\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right)$ ein Stück in Richtung $\Delta x_k \; mit \; k \in \{1;2;3;\dots;n\}$ bewegt bzw. die Werte verändert:

$$\lim_{\Delta\to 0}\Delta f\left(\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3,\dots,\Delta x_n\right) \quad = \quad \lim_{\Delta\to 0}\Delta f\left(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3,\dots,x_n+\Delta x_n\right) \quad \xrightarrow[\Delta\to 0]{\lim} \quad df$$

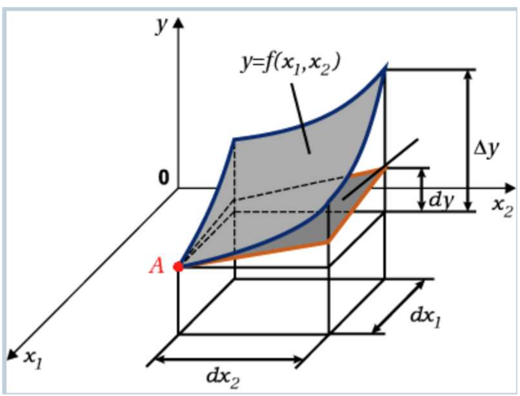
Graphisch betrachtet haben wir hier eine Hyperebene, auf der sich der Punkt bewegt.

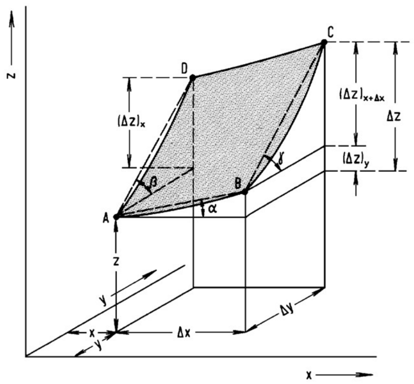
Für den ***Fall n = 2****:*

$$df\left(x_1;x_2\right) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1;x_2\right)\cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1;x_2\right)\cdot dx_2 \quad = \quad f_{x_1}\left(x_1;x_2\right)\cdot dx_1 + f_{x_2}\left(x_1;x_2\right)\cdot dx_2$$

$$df\left(x_0;y_0\right) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0;y_0\right)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0;y_0\right)\cdot dy \quad = \quad f_x\left(x_0;y_0\right)\cdot dx + f_y\left(x_0;y_0\right)\cdot dy$$

Die Geometrische Bedeutung kann in hier vorliegenden dreidimensionalen Fall (Funktion mit zwei unabhängigen Variablen x_1 und x_2 mit einer davon abhängigen Variablen) stellt das totale oder vollständige Differential die näherungsweise Änderung in einer unendlich (= infinitesimal) kleinen Umgebung des Funktionswertes eines in einer Tangentialebene liegenden Berührpunktes $P\left(x_1,x_2\right)$.





Folgende Anwendungen sind hieraus möglich:

- ⇨ Ableitung impliziter Funktionen
- ⇨ Grenzrate der Substitution einer Produktions- oder Nutzenfunktion

Ableitung von Funktionen in impliziter Form mit $f\left(x_1, x_2\right) = 0$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 = 0 \xrightarrow{:dx_1}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} \xrightarrow{GRS} GRS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = -\frac{f_{x_1}}{f_{x_2}}$$

Ableitung impliziter Funktionen (=> Funktion nicht explizit gegeben)

Totales Differential einer impliziten Funktion $f(x_1, x_2, y) = 0$

$$0 = \frac{\partial f(x_1, x_2, y)}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2, y)}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f(x_1, x_2, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

Falls y konstant ist $(\mathrm{d}y = 0)$, dann folgt

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\frac{\partial f(x_1,x_2,y)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x_1,x_2,y)}{\partial x_2}}$$

Da y unverändert bleibt, bewegt man sich auf der entsprechenden Niveaulinie. Die Steigung dieser Niveaulinie $\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}x_2$ lässt sich über die implizite Differentiation ermitteln. Bitte beachten Sie das **Minuszeichen**!

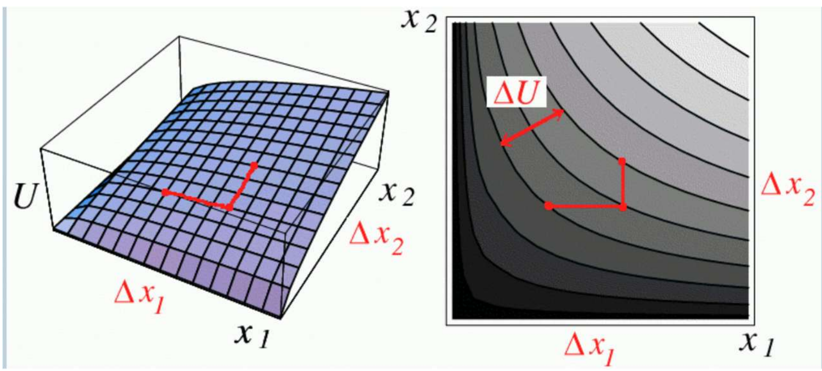
Und die Grenzrate der Substitution

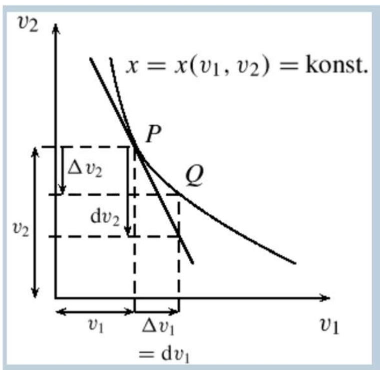
(1) Ökonomisch gibt die **Grenzrate der Substitution im Konsum (GRS)** zwischen zwei Gütermengen an, um wie viele Einheiten Δx_2 die Gütermenge x_2 erhöht (gesenkt) werden muss, wenn bei konstantem Nutzenniveau U die Gütermenge x_1 *um eine (infinitesimal kleine) Einheit* Δx_1 reduziert (erhöht) wird.

(2) Geometrisch kann man sich diese Gütersubstitution als einen Schritt von P nach Q entlang der Indifferenzkurve, die zu U gehört, vorstellen.

(3) Mathematisch entspricht die GRS der Steigung einer Indifferenzkurve im Punkt $P = (x_1, x_2)$.
Bilde das totales Differential der Nutzenfunktion $U = u(x_1, x_2)$.

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2$$





Weitere Informationen:

Wolfram MathWorld: The Web's Most Extensive Mathematics Resource

https://mathworld.wolfram.com/