

Vollständiges (totales) Differential:

Unter dem totalen Differential bzw. der vollständigen Ableitung versteht man folgenden Ausdruck:

Unter dem vollständigen Differential $df(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ der differenzierbaren Funktion $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ versteht man die Summe aller partiellen Differentiale:

$$df(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot dx_k$$

Das totale Differential wird auf Funktionen mit mehreren Variablen angewendet, um die tendenzielle Änderung der Funktion bei Änderung einer oder mehrerer Variablen zu ermitteln.

Daher ist das totale Differential ein Maß für die Veränderung der Funktion $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, wenn man sich im Punkt $P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ein Stück in Richtung Δx_k mit $k \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$ bewegt bzw. die Werte verändert:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta f(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \dots, x_n + \Delta x_n) \xrightarrow{\lim_{\Delta \rightarrow 0}} df$$

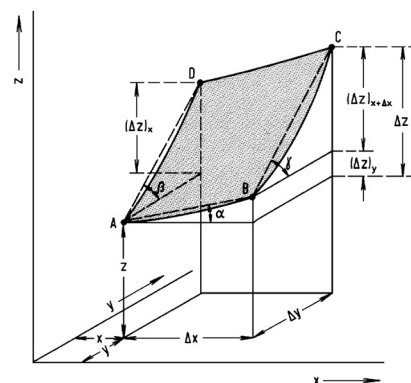
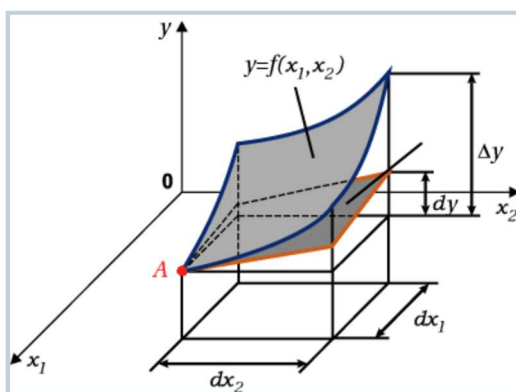
Graphisch betrachtet haben wir hier eine Hyperebene, auf der sich der Punkt bewegt.

Für den **Fall $n = 2$** :

$$df(x_1; x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1; x_2) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1; x_2) \cdot dx_2 = f_{x_1}(x_1; x_2) \cdot dx_1 + f_{x_2}(x_1; x_2) \cdot dx_2$$

$$df(x_0; y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot dy = f_x(x_0; y_0) \cdot dx + f_y(x_0; y_0) \cdot dy$$

Die Geometrische Bedeutung kann in hier vorliegenden dreidimensionalen Fall (Funktion mit zwei unabhängigen Variablen x_1 und x_2 mit einer davon abhängigen Variablen) stellt das totale oder vollständige Differential die näherungsweise Änderung in einer unendlich (= infinitesimal) kleinen Umgebung des Funktionswertes eines in einer Tangentialebene liegenden Berührungspunktes $P(x_1, x_2)$.



Aufgaben / Übungen:

Teil 1: Totales Differenzial

Berechnen Sie das totale Differenzial der folgenden Funktionen mit zwei Variablen:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

b) $f(x, y) = 3x^4 - 7xy + x - 5y$

c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = \sqrt[4]{x^3 + \frac{1}{y^5}}$

e) $f(x, y) = e^{x^2} + e^{4xy} + \frac{1}{y^3}$

f) $f(x, y) = e^{x^2} + e^{4xy} \cdot y^3$

g) $f(x, y) = \frac{2y}{x^2 + 1}$

h) $f(x, y) = \left(x^2 + \frac{5}{2y}\right)^4$

Berechnen Sie das totale Differenzial der folgenden Funktionen mit drei Variablen:

i) $f(x, y, z) = x^2 \cdot y^3 \cdot z^4$

j) $f(x, y, z) = e^{x^4 + y^2 + z^3}$

k) $f(x, y, z) = \sqrt{x^5 \cdot y^3 \cdot z}$

l) $f(x, y, z) = \ln(x^5 \cdot y^3 \cdot z)$

Ermitteln Sie das totale Differenzial der gegebenen Funktionen im Punkt P:

m) $f(x, y) = x^3 + 4xy^2$ $P(x, y, f) = (2 \mid 3 \mid f)$

n) $f(x, y) = e^{x^3} + \frac{4x}{y^2}$ $P(x, y, f) = (1 \mid 2 \mid f)$

Teil 2: Implizite Funktionen

Bilden Sie die 1. Ableitung der **implizit gegebenen Funktionen**.

a) $-x^2 + 5x - y - 1 = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x)$

b) $x^3 \cdot e^y - 2y \cdot e^x + 2 = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x)$

c) $6x^2 - 0,5y^2 + 10 = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x)$

d) $u \cdot e^v - v^2 \cdot e^u + uv = 0 \rightarrow \frac{dv}{du} = v'(u)$

e) $\ln(ab) - b^2 \cdot \ln a + a \cdot \ln b = 0 \rightarrow \frac{db}{da} = b'(a)$

f) $2x^2 + 3y^2 + 4z^4 = 0 \rightarrow \frac{dz}{dx} = z'(x) \text{ und } \frac{dz}{dy} = z'(y)$

Teil 3: Grenzrate der Substitution

a)

Gegeben sei die Produktionsfunktion $f(x, y) = 0,5 \cdot x^{0,4} \cdot y^{0,6}$ mit dem Produktionsniveau $f = 16$ [ME]. Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution an der Stelle $x = 32$.

b)

Gegeben sei die (ordinale) Nutzenfunktion $u(x, y) = 2 \cdot x^{0,8} \cdot y^{0,6}$ mit den verfügbaren Konsummengen $x = 24$ [ME] und $y = 32$ [ME]. Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution und interpretieren Sie den erhaltenen Wert.

c)

Gegeben sei die (ordinale) Nutzenfunktion $u(a, b, c, d) = 2 \cdot \sqrt{ab} + 8\sqrt{bc} + \sqrt{d}$

Das erzielbare Nutzenniveau U ergibt sich aus den verfügbaren Konsummengen $a = 20$ [ME], $b = 20$ [ME], $c = 5$ [ME] und $d = 25$ [ME].

Um wie viele Einheiten muss c.p. der Konsum des 2. Gutes b gesteigert werden, wenn vom 3. Faktor eine halbe Einheit substituiert werden soll, das erreichte Nutzenniveau allerdings erhalten bleiben soll?

Anlage:

Folgende Anwendungen sind hieraus möglich:

- ⇒ Ableitung impliziter Funktionen
- ⇒ Grenzrate der Substitution einer Produktions- oder Nutzenfunktion

Ableitung von Funktionen in impliziter Form mit $f(x_1, x_2) = 0$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 = 0 \xrightarrow{:dx_1}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} \xrightarrow{GRS} GRS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = -\frac{f_{x_1}}{f_{x_2}}$$