Der Logarithmus

Was ist der Logarithmus – eine kleine Auffrischung des Wissens 😉

Lösung einer Exponentialgleichung ertasten

Ein Kapital von 500 € wächst jährlich um 2 %. Das Kapital nach n Jahren beträgt also

$$K(n) = 500 \cdot 1{,}02^n.$$

Wie viele Jahre würde es dauern, bis das Kapital auf 1 Million € anwächst?

Taste dich mit dem Taschenrechner an das Ergebnis heran.

Es würde rund 384 Jahre dauern, bis das Kapital auf 1 Million € anwächst.

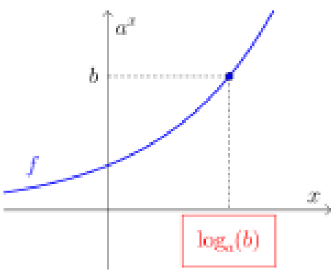
Logarithmus

Die Lösung x der Gleichung $a^x = b$ heißt **Logarithmus von b zur Basis a**:

$$a^x = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_a(b) \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$$

Sprechweise: „*x ist der Logarithmus von b zur Basis a.*"

Rechts siehst du den Graphen der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$. Beschrifte die markierte Stelle.



Logarithmen händisch berechnen

$a^? = b$

Wenn wir $\log_a(b)$ berechnen, denken wir: „a hoch welche Zahl ergibt b?"

a) $\log_{10}(1000) = 3$, weil $10^{\boxed{3}} = 1000$.

b) $\log_7(49) = 2$, weil $7^2 = 49$.

c) $\log_2(16) = 4$, weil $2^4 = 16$.

d) $\log_2(0{,}5) = -1$, weil $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = 0{,}5$.

e) $\log_{11}(\sqrt{11}) = \frac{1}{2}$, weil $11^{1/2} = \sqrt{11}$.

f) $\log_e(e^2) = 2$, weil $e^2 = e^2$.

g) $\log_b(b) = 1$, weil $b^1 = b$.

h) $\log_b(1) = 0$, weil $b^0 = 1$.

Logarithmus am Taschenrechner

Zwei besondere Basen sind so wichtig, dass dein Taschenrechner eigene Tasten dafür hat:

Zehnerlogarithmus (Basis 10)
$\log_{10}(b) \rightsquigarrow$ Taschenrechner: $\boxed{\text{LOG}}$
Kurzschreibweise: $\mathbf{lg}(b)$

Natürlicher Logarithmus (Basis e)
$\log_e(b) \rightsquigarrow$ Taschenrechner: $\boxed{\text{LN}}$
Kurzschreibweise: $\mathbf{ln}(b)$

Umrechnungsregel zwischen Logarithmen mit verschiedenen Basen

$a > 0,\ a \neq 1$

Du kannst auch Logarithmen mit jeder anderen Basis a berechnen.

Die Formel dafür ist $\log_a(b) = \dfrac{\lg(b)}{\lg(a)} = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$.

Exponentialgleichungen exakt lösen

Löse die Gleichung $500 \cdot 1{,}02^n = 1\,000\,000$ nach n auf.

$$1{,}02^n = 2000 \quad \Longleftrightarrow \quad n = \log_{1{,}02}(2000) = \frac{\lg(2000)}{\lg(1{,}02)} = 383{,}83\ldots$$

Übung 1:

a) $\log_2 64 = ?$	**b)** $\log_3 \frac{1}{243} = ?$	**c)** $\log_4 8 = ?$	**d)** $\log_5 \frac{1}{\sqrt{125}} = ?$
a) $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}5 = ?$	**b)** $\log_{\frac{1}{3}} 27 = ?$	**c)** $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt[5]{16}} = ?$	**d)** $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{25} = ?$
a) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} = ?$	**b)** $\log_{\frac{4}{5}} 1 = ?$	**c)** $\log_{\frac{7}{8}} \frac{64}{49} = ?$	**d)** $\log_{\frac{3}{10}} \frac{1}{\sqrt{0{,}3}} = ?$

$$\log_{2} 64 = x \quad \rightarrow \quad 64 = 2^x \quad \rightarrow \quad x = 6$$

$$\log_{3} \frac{1}{243} = x \quad \rightarrow \quad \frac{1}{243} = 3^x \quad \rightarrow \quad x = -5$$

$$\log_{4} 8 = x \quad \rightarrow \quad 8 = 4^x \quad \rightarrow \quad x = 1{,}5$$

$$\log_{5} \frac{1}{\sqrt{125}} = x \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{125}} = 5^x \quad \rightarrow \quad x = -1{,}5$$

$$\log_{e} 64 = \ln 64 = x \quad \rightarrow \quad 64 = e^x \quad \rightarrow \quad x \approx 4{,}16$$

$$\log_{e} 8 = \ln 8 = x \quad \rightarrow \quad 8 = e^x \quad \rightarrow \quad x = 2{,}08$$

a) $\log_x 125 = 3$	**b)** $\log_x 216 = 3$	**c)** $\log_x \frac{1}{8} = -3$	**d)** $\log_x 64 = 3$
a) $\log_x \frac{1}{256} = 8$	**b)** $\log_x \frac{3}{4} = -1$	**c)** $\log_x 256 = -2$	**d)** $\log_x 128 = 7$
a) $\log_2 x = 10$	**b)** $\log_3 x = -2$	**c)** $\log_4 x = \frac{1}{2}$	**d)** $\log_5 x = 3$
a) $\log_{0{,}2} x = -1$	**b)** $\log_{\frac{6}{7}} x = -3$	**c)** $\log_{1{,}125} x = -\frac{1}{3}$	**d)** $\log_{1{,}5} x = 2$
a) $x = \lg 43{,}53$	**b)** $\lg x = 1{,}5$	**c)** $x = \lg 0{,}1$	**d)** $\lg x = 3$
a) $\lg x = 1{,}2$	**b)** $x = \lg 25$	**c)** $\lg x = -0{,}1$	**d)** $\lg x = 1{,}105$

$$\log_{x} 125 = 3 \quad \rightarrow \quad 125 = x^3 \quad \rightarrow \quad x = 5$$

$$\log_{x} 216 = 3 \quad \rightarrow \quad 216 = x^3 \quad \rightarrow \quad x = 6$$

$$\log_{x} \frac{1}{8} = -3 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{8} = x^{-3} \quad \rightarrow \quad x = 2$$

$$\log_{x} 64 = 3 \quad \rightarrow \quad 64 = x^3 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

$$\log_{2} x = 10 \quad \rightarrow \quad x = 2^{10} \quad \rightarrow \quad x = 1024$$

$$\log_{3} x = -2 \quad \rightarrow \quad x = 3^{-2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{9}$$

$$\log_{4} x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x = 4^{0,5} \quad \rightarrow \quad x = 2$$

$$\log_{5} x = 3 \quad \rightarrow \quad x = 5^3 \quad \rightarrow \quad x = 125$$

a) $x = \ln 54{,}52$	**b)** $\ln x = 3{,}9$	**c)** $x = \ln 0{,}2$	**d)** $\ln x = 5$
a) $\ln x = 173{,}5$	**b)** $x = \ln 49$	**c)** $\ln x = -1{,}4$	**d)** $\ln x = 5{,}123$

$$x = \ln 54{,}52 \quad \rightarrow \quad x = 4 \quad \rightarrow \quad e^4 = 54{,}52$$

$$\ln x = 3{,}9 \quad \rightarrow \quad x = e^{3,9} \approx 49{,}4$$

$$x = \ln 0{,}2 \quad \rightarrow \quad x = -1{,}61 \quad \rightarrow \quad e^{-1,61} = 0{,}2$$

$$\ln x = 5 \quad \rightarrow \quad x = e^5 \approx 148{,}41$$

Jost BÜRGI

John NAPIER

Einige historische Bemerkungen über Logarithmen:

Eine Methode, die jahrhundertelang in Verwendung stand, war das Rechnen mit Logarithmen, die zunächst nicht als Exponenten von Potenzen betrachtet wurden. Um einen brauchbaren Algorithmus zu erhalten, musste man Logarithmentafeln mit geringer Schrittweite aufstellen. Der Schweizer Uhrmacher Jost BÜRGI (1552–1632) entwickelte bereits Ende des 16. Jahrhunderts als Hofastronom in Prag sogenannte „Progress-Tabulen". Johannes KEPLER (1571–1630) erkannte die Nützlichkeit dieses neuen Hilfsmittels und überredete BÜRGI, diese zu drucken. In den Wirren des 30-jährigen Krieges gingen die meisten Exemplare der 1620 erschienenen Tabellen verloren. Unabhängig von BÜRGI stellte der schottische Baron John NAPIER (NEPER) (1550–1617) gleichfalls Logarithmentafeln auf, die 1614 mit dem Titel „Mirifici Logarithmorum..." in Edinburgh veröffentlicht und rasch bekannt wurden. 1616 wurden sie ins Englische übersetzt, 1617 lernte KEPLER sie kennen und war begeistert.

Sowohl BÜRGI als auch NAPIER nahmen als Basis der Logarithmen Zahlen, die e (der Basis der natürlichen Logarithmen) bzw. $1/e$ nahe sind. Als der englische Professor der Geometrie Henry BRIGGS (1560–1630) von den NAPIERschen Logarithmen erfuhr, kontaktierte er NAPIER und schlug ihm vor, als Basis 10 zu nehmen, und gemeinsam mit NAPIER berechnete BRIGGS solche Tabellen, die nach dem Tod NAPIERS veröffentlicht wurden. Die BRIGGSschen Tabellen wurden auf 14 Dezimalstellen genau berechnet. Ende des 17. Jahrunderts erkannte man, dass die Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. Wer heute auf Knopfdruck mit dem Taschenrechner bzw. Taschencomputer den Logarithmus einer Zahl berechnet, sollte sich wenigstens ungefähr vorstellen können, was in seiner „Black Box" vorgeht.

Weitere Übungen und Informationen

- ⇨ http://www.mathematik.net/log-gleich-neu/0-inhalt-log-gleich-neu-1.htm
- ⇨ http://www.mathematik.net/log-gleich-neu/uebungen/uebung-log-gleich.PDF