Untersuchung der ln-Funktion mit Parameter-Variationen

$$f_{a,b,c,d}(x) \quad = \quad a \cdot \ln(bx+c)+d$$

Funktion der Parameter bzw. welche Änderung im Kurvenverlauf bewirkt eine Variation der Parameter:

a	**=>**	**Spiegelung an der x-Achse / Krümmungsvariation**
b	**=>**	**Spiegelung an der y-Achse / Krümmungsvariation**
c	**=>**	**Variation auf der x-Achse (Nullstelle)**
d	**=>**	**Variation auf der y-Achse (y-Achsenabschnitt)**

⇨ **Die ln-Funktion ist die Umkehrfunktion zur e-Funktion**

Da die Definitionsmenge der ln-Funktion nur die positiven x-Werte sind, muss gelten:

Argument des Logarithmus muss positiv sein => $f(x)=\ln(bx+c) \xleftrightarrow{\text{Definitionsmenge}} bx+c>0$

Herleitung der Ableitung:

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=??? \rightarrow f(x) = \ln(x) \xrightarrow[\text{Exponentialgleichung}]{e \text{ als Basis}} e^{f(x)} = e^{\ln(x)}=x$$

$$Bilden\ der\ Ableitung:$$

$$\left[e^{f(x)}\right]' = \left[e^{\ln(x)}\right]'=[x]' \xrightarrow{Ableitung:Kettenregel} e^{f(x)} \cdot f(x)' = 1 \rightarrow f(x)' = \frac{1}{e^{f(x)}}$$

$$Auswertung: \quad f(x)' = \frac{1}{e^{f(x)}} \overset{f(x)=\ln(x)}{=} \frac{1}{e^{\ln(x)}} \overset{e^{\ln(x)}=x}{=} \frac{1}{x}$$

$$\text{allgemein:} \quad f(x)=\ln(g(x)) \xrightarrow{Ableitung} f'(x)=\frac{1}{g(x)}(g'(x))=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

Allgemein gilt demnach für die Ableitungstechnik der Logarithmusfunktion auf Basis der Kettenregel:

$$f(x)=\ln\left(ax^2+bx+c\right)$$

$$Schritt\ 1: Ableitung\ der\ äußeren\ Funktion \leftrightarrow \ln \rightarrow \frac{1}{Argument}$$

$$Schritt\ 2: Ableitung\ der\ inneren\ Funktion \leftrightarrow Ableitung\ des\ Arguments$$

$$f'(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c}\left(2ax^2+b\right)$$

Für eine allgemeine Basis a > 0 gilt: $f(x)=\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}=\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}\cdot\ln(x)$

Übungen: Def.-Menge und Ableitungen

⇨ **S. 149 / Nr. 3**

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right) = \ln\left(x^{0,5}\right) \rightarrow D = \mathbb{R}^+ = \left]0;\infty\right[= \{x \mid 0 < x \wedge x \in \mathbb{R}\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 0,5 \cdot x^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{x^{0,5}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right) = \ln\left(x^{0,5}\right) = \frac{1}{2}\ln x$$

$$f(x) = \ln\left(1+3x^2\right) \rightarrow D = \mathbb{R} \quad und \quad f'(x) = \frac{6x}{1+3x^2}$$

$$f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$$

$$D: \; 1-x^2 > 0 \xrightarrow{+x^2} 1 > x^2 \xrightarrow{\sqrt{\;}} |x| < 1 \rightarrow -1 < x < 1 \rightarrow x \in \left]-1;1\right[$$

$$f'(x) = \frac{-2}{1-x^2}$$

$$f(x) = 3\ln\left(\sqrt{4x}\right) = 3\ln\left(4x\right)^{0,5} = 1,5\ln\left(4x\right)$$

$$D: \; \sqrt{4x} > 0 \xrightarrow{Quadrieren} 4x > 0 \xrightarrow{:4} x > 0 \rightarrow D = \mathbb{R}^+$$

$$f'(x) = 1,5 \cdot \frac{4}{4x} = \frac{1,5}{x}$$

$$f(x) = \sqrt{\ln(x)} = \left[\ln(x)\right]^{0,5}$$

$D:$

$Bedingung\ 1: \quad x > 0$

$Bedingung\ 2: \quad \ln(x) \geq 0 \rightarrow \ln_e(x) = 0 \rightarrow x = e^0 = 1 \rightarrow x \geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x \geq 1 \end{array}\right\} \quad D = \{x \mid x \geq 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(x)\right]^{-0,5} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{2x \cdot \sqrt{\ln(x)}}$$

$$f(x) = \ln(\sin(x))$$

$$D:\ \sin(x) > 0 \rightarrow x \in]0;\pi[\ oder \ x \in]2k\pi;(2k+1)\pi[\ mit \ k \in \mathbb{Z} \quad und \quad f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$f(x) = \sin(\ln(x))$$

$$D:\ x > 0 \rightarrow D = \mathbb{R}^+ \quad und \quad f'(x) = \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}$$

$$f(x) = (\ln(x))^{-1} = \frac{1}{\ln(x)}$$

$D:$

$$\left.\begin{array}{l} Bedingung\ 1:\ x > 0 \\ Bedingung\ 2:\ \ln(x) \neq 0 \rightarrow \ln_e(x) = 0 \rightarrow x = e^0 = 1 \rightarrow x \neq 1 \end{array}\right\} D \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$f'(x) = (-1) \cdot (\ln(x))^{-2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-1}{x \cdot [\ln(x)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)}(g'(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

und 150 / Nr. 13

$$f(t) = \ln(t^4) = 4\ln(t) \rightarrow f'(t) = \frac{4}{t}$$

$$f(t) = [\ln(t)]^4 \rightarrow f'(t) = 4 \cdot [\ln(t)]^3 \cdot \frac{1}{t}$$

$$f(u) = \ln\left(\frac{u}{u+1}\right)$$

$$\rightarrow f'(u) = \frac{1}{\frac{u}{u+1}} \cdot \frac{1 \cdot (u+1) - u \cdot 1}{(u+1)^2} = \frac{u+1}{u} \cdot \frac{1}{(u+1)^2} = \frac{1}{u(u+1)}$$

$$f(t) = k\ln\left(\sqrt[3]{2t}\right) = k\ln(2t)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}k\ln(2t) \rightarrow f'(t) = \frac{1}{3t}k$$

$$f(a) = \ln(1-a)^2 = 2\ln(1-a) \rightarrow f'(a) = \frac{-2}{1-a}$$

$$f(s) = \left[\ln(s-a)\right]^3 \rightarrow f'(s) = 3\left[\ln(s-a)\right]^2 \cdot \frac{1}{s-a} \cdot 1 = \left[\ln(s-a)\right]^2 \cdot \frac{3}{s-a}$$

$$f(x) = x \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(x) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2} \cdot \ln(x) + 1\right]$$

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(kx) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(kx) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2} \cdot \ln(kx) + 1\right]$$

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{\left[\ln(x)\right]^2} = \frac{\ln(x) - 1}{\left[\ln(x)\right]^2} = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\left[\ln(x)\right]^2}$$

$$f(x) = \frac{\ln\sqrt{x}}{\ln(x)} = \frac{\frac{1}{2}\ln x}{\ln(x)} = \frac{1}{2} \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{0{,}5 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln(x) - \frac{1}{2}\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\left[\ln(x)\right]^2} = \frac{0}{\left[\ln(x)\right]^2} = 0$$