Übung e-Funktion

Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{1}{2}(t - x^2)e^{-x} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

Das Schaubild von f_t ist K_t.

Gegeben ist zusätzlich die Funktion g durch

$$g(x) = -x \cdot e^{-x} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

Das Schaubild von g ist G.

a) Zeigen Sie: $f_t'(x) = g(x) - f_t(x)$. (2 Korrekturpunkte)

b) Für welches $t \in \mathbb{R}$ schneidet die Tangente an K_t in $P_t(1 \mid f_t(1))$ die x-Achse in N (1,5 | 0)? (3 Korrekturpunkte)

c) Untersuchen Sie K_3 auf Asymptoten, Schnittpunkte mit der x-Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Es genügt, die Koordinaten der Wendepunkte auf zwei Nachkommastellen gerundet anzugeben.
Zeichnen Sie K_3 für $-2 \le x \le 5$ mit 1 LE = 2 cm. (11 Korrekturpunkte)

d) Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder K_3 und G nur in den Extrempunkten von K_3 schneiden.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von K_3 und G eingeschlossen wird. (7 Korrekturpunkte)

e) Für welche Werte von t hat K_t genau zwei Wendepunkte und keinen Extrempunkt? (7 Korrekturpunkte)

Teil a)

$$f_t(x) = \frac{1}{2}(t - x^2)e^{-x} = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x^2\right)e^{-x} \qquad g_t(x) = -xe^{-x}$$

$$f_t'(x) = \frac{1}{2}(-2x)e^{-x} + \frac{1}{2}(t - x^2)e^{-x} \cdot (-1) = (-x) \cdot e^{-x} - \frac{1}{2}(t - x^2)e^{-x} = e^{-x} \cdot \left[-x - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x^2\right]$$

Teil b)

$$f_t'(x) = e^{-x} \cdot \left[-x - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x^2\right] \xrightarrow{x=1} f_t'(1) = e^{-1} \cdot \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right] = \frac{-0{,}5 - 0{,}5t}{e} = m$$

$$f_t(1) = \frac{1}{2}(t - 1)e^{-1} = \frac{0{,}5t - 0{,}5}{e}$$

$$y = mx + b \;\rightarrow\; \frac{0{,}5t - 0{,}5}{e} = \frac{-0{,}5 - 0{,}5t}{e} \cdot 1 + b \;\rightarrow\; \frac{0{,}5t - 0{,}5}{e} - \frac{-0{,}5 - 0{,}5t}{e} = b$$

$$\rightarrow\; \frac{t}{e} = b \xrightarrow{\text{Tangente}} y = \frac{-0{,}5 - 0{,}5t}{e}x + \frac{t}{e}$$

$$\xrightarrow{\text{Schnitt mit } x-\text{Achse}} y = \frac{-0{,}5 - 0{,}5t}{e}x + \frac{t}{e} \overset{x=1{,}5}{=} 0 \;\rightarrow\; \frac{-0{,}5 - 0{,}5t}{e} \cdot 1{,}5 + \frac{t}{e} = 0$$

$$\xrightarrow[\cdot 1{,}5]{\cdot e} -0{,}75 - 0{,}75t + t = 0 \;\rightarrow\; 0{,}25t = 0{,}75 \;\rightarrow\; t = 3$$

Teil c)

$$f_3(x)=\frac{1}{2}\left(3-x^2\right)e^{-x}=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)e^{-x} \qquad g_t(x)=-xe^{-x}$$

$$f_3'(x)=e^{-x}\cdot\left[-x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x^2\right]$$

Nullstellen:

$$f_3(x)=\frac{1}{2}\left(3-x^2\right)e^{-x}=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}=0 \quad \xrightarrow[Nullprodukt]{e^{-x}\neq 0} \quad |x|=\sqrt{3}$$

Extrema:

$$f_3'(x)=e^{-x}\cdot\left[-x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x^2\right] \quad \xrightarrow[Nullprodukt]{e^{-x}\neq 0} \quad \frac{1}{2}\left(x^2-2x-3\right)=0 \quad \rightarrow \quad x_1=-1 \quad \wedge \quad x_2=3$$

$$f_3''(x)=-e^{-x}\cdot\left[-x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x^2\right]+e^{-x}\cdot[-1+x]=e^{-x}\cdot\left[x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right]+e^{-x}\cdot[-1+x]=e^{-x}\cdot\left[2x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\right]$$

$$f_3''(-1)=e^{1}\cdot\left[-2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]=-2e<0 \quad \rightarrow \quad Max(-1 \mid e)$$

Wendestellen:

$$f_3''(x)=e^{-x}\cdot\left[2x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\right] \quad \xrightarrow[Nullprodukt]{e^{-x}\neq 0} \quad -\frac{1}{2}\left(x^2-4x-1\right)=0 \quad \rightarrow \quad x_{1/2}=2\pm\sqrt{5}\approx 2\pm 2{,}24$$

$$f_3'''(x)=-e^{-x}\cdot\left[2x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\right]+e^{-x}\cdot[2-x]=e^{-x}\cdot\left[-2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2\right]+e^{-x}\cdot[2-x]=e^{-x}\cdot\left[-3x+1{,}5+0{,}5x^2\right]$$

Teil e)

Keine Extrema:

$$f_t'(x)=e^{-x}\cdot\left[-x-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}x^2\right]=0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}t=0 \quad \xrightarrow{D=b^2-4ac} \quad D=1+t$$

Bedingung für keine Extrema: $D=1+t\leq 0 \quad \rightarrow \quad t\leq -1$

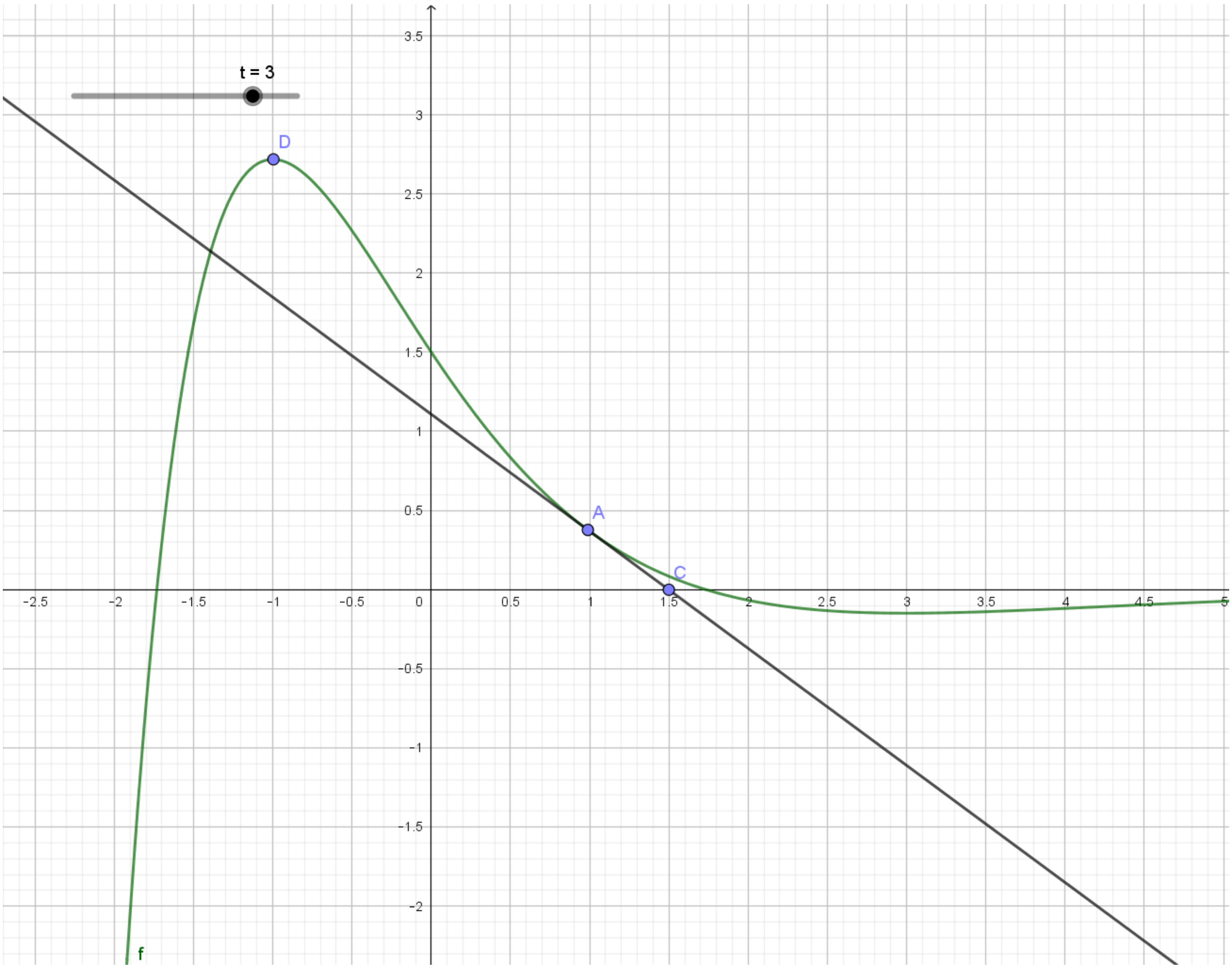
genau zwei WP:

$$f_t''(x)=-e^{-x}\cdot\left[-x-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}x^2\right]+e^{-x}\cdot[-1+x]=e^{-x}\cdot\left[x+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}x^2\right]+e^{-x}\cdot[-1+x]=e^{-x}\cdot\left[-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}t-1\right]$$

$$f_t''(x)=e^{-x}\cdot\left[-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}t-1\right]=0 \quad \xrightarrow{\cdot(-2)} \quad x^2-4x-t+2=0 \quad \xrightarrow{D=b^2-4ac} \quad D=16-4(-t+2)$$

Bedingung für genau zwei WP: $D=16-4(-t+2)>0 \quad \rightarrow \quad D=16+4t-8>0 \quad \rightarrow \quad t>-2$

Zusammenfassung: $\rightarrow \quad -2<t\leq -1$



t = 3
D
A
C
f