Übungen zur Kurvenuntersuchung (grundlegende Fragen) bei ln- und e-Funktionen

Untersuchen / Bearbeiten Sie folgende Sachverhalte bei den Funktionen:

a) Definitionsbereich
b) Verhalten im Unendlichen
c) Symmetrie
d) Nullstellen mit Steigung
e) Extrema (hinreichende Bedingung)
f) Wendepunkte mit Steigung (notwendige Bedingung)
g) Graph

Logarithmusfunktionen:

$f(x)=\ln\left(20-x^2\right)$	$g(x)=x\cdot\ln(x)$	$h(x)=\dfrac{5\cdot\ln(x)}{x}$
$t(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$	$k(x)=\dfrac{x^2}{2\cdot\ln(x)}$	

Lösungen: $f(x)=\ln\left(20-x^2\right)$

$$D:\quad 20-x^2>0 \quad\rightarrow\quad 20>x^2 \quad\rightarrow\quad x\in\left]-\sqrt{20}\,;\sqrt{20}\right[$$

$$Grenzwerte:\quad \lim_{x\to\pm\sqrt{20}} \ln\left(20-x^2\right)\xrightarrow{\ln(0)???}-\infty$$

$$Symmetrie:\quad f(-x)=\ln\left[20-(-x)^2\right]=\ln\left(20-x^2\right)=f(x)\quad\rightarrow\quad Achsensymmetrie$$

$$Nullstellen:\quad f(x)=\ln\left(20-x^2\right)=0 \quad\rightarrow\quad 20-x^2=e^0 \quad\rightarrow\quad 19=x^2 \quad\rightarrow\quad |x|=\sqrt{19}\,[\in D]$$

$$Extrema:\quad f'(x)=\frac{-2x}{20-x^2}=0 \quad\rightarrow\quad x=0$$

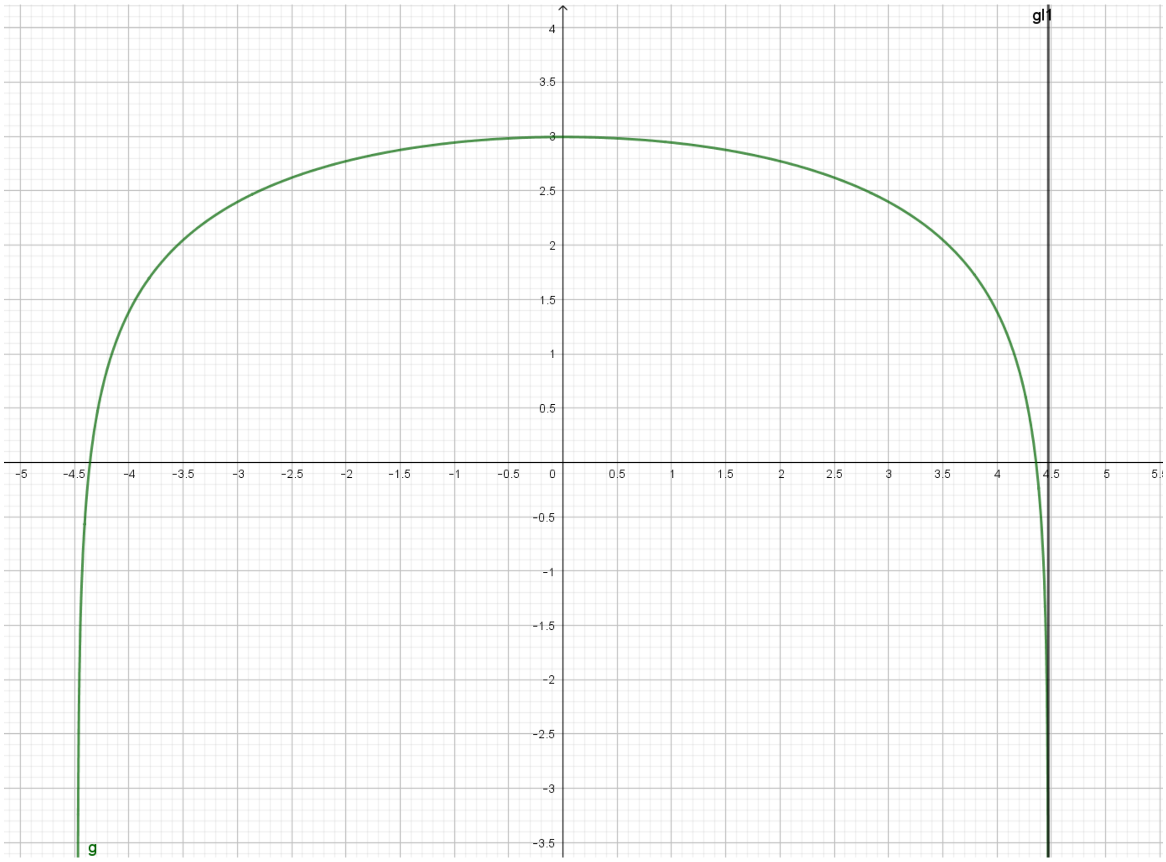
$$f''(x)=\frac{-2\cdot\left(20-x^2\right)-(-2x)\cdot(-2x)}{\left(20-x^2\right)^2}=\frac{-40+2x^2-4x^2}{\left(20-x^2\right)^2}=\frac{-40-2x^2}{\left(20-x^2\right)^2}$$

$$\xrightarrow{x=0}\quad f''(0)=-0{,}1<0 \quad\rightarrow\quad Max\left(0\mid\ln(20)\right)$$

$$Steigung\ bei\ den\ Nullstellen:$$

$$f'\left(\sqrt{19}\right)=\frac{-2\cdot\sqrt{19}}{20-19}=-2\cdot\sqrt{19}\quad\xrightarrow{Achsensymmetrie}\quad f'\left(-\sqrt{19}\right)=2\cdot\sqrt{19}$$

$$Wendepunkte:\ f''(x)=\frac{-40-2x^2}{\left(20-x^2\right)^2}=0 \quad\rightarrow\quad -40-2x^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2=-20 \quad nicht\ definiert$$



g
gl1

Lösungen: $g(x) = x \cdot \ln(x)$

$D: \quad \ln(x) > 0 \quad \rightarrow \quad x > 0 \quad \rightarrow \quad D = \mathbb{R}^{+}$

$Grenzwerte: \quad \lim_{x \to 0}\left[x \cdot \ln(x)\right] \xrightarrow{"0 \cdot (-\infty)"} 0 \quad und \quad \lim_{x \to \infty}\left[x \cdot \ln(x)\right] \xrightarrow{"\infty \cdot \infty"} \infty$

Wegen der Definitionsmenge kann hier keine Symmetrie vorliegen.

$Nullstellen: \quad g(x) = x \cdot \ln(x) = 0 \quad \xrightarrow{Nullstelle} \quad x = 1$

$\xrightarrow{Satz\ vom\ Nullprodukt} \quad \ln x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$

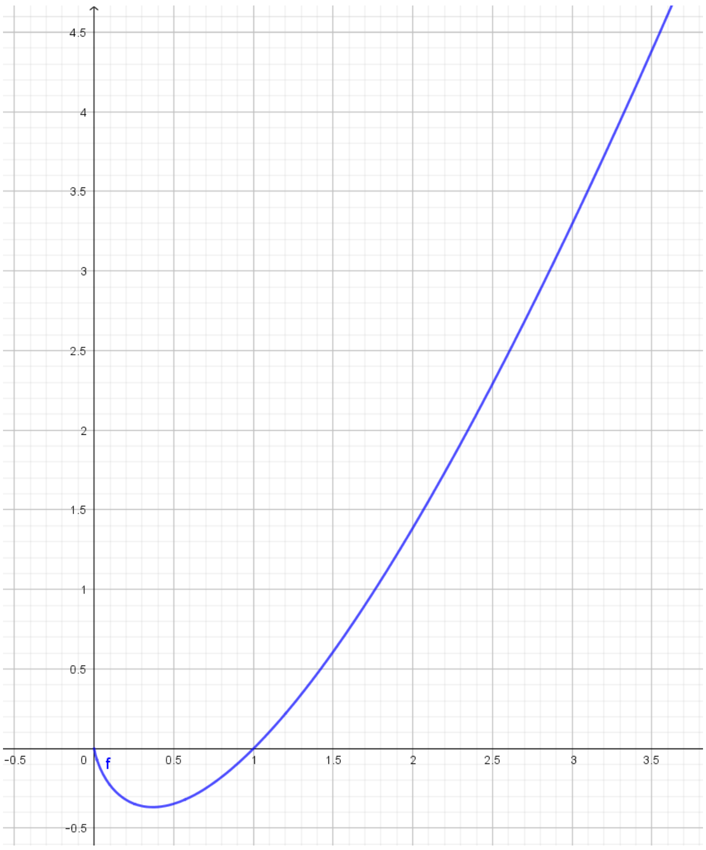
$\xrightarrow{Satz\ vom\ Nullprodukt} \quad x = 0\left[nicht\ definiert\right]$

$Extrema: \quad g'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \ln(x) = -1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$

$g''(x) = \frac{1}{x} \quad \xrightarrow{x = \frac{1}{e}} \quad f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0 \quad \rightarrow \quad Min\left(\frac{1}{e} \,\middle|\, -\frac{1}{e}\right)$

$Steigung\ bei\ den\ Nullstellen: \quad g'(1) = \ln(1) + 1 = 1$

$Wendepunkte: g''(x) = \frac{1}{x} = 0 \quad nicht\ definiert \quad \rightarrow \quad keine\ Wendestelle(n)$



Lösungen: $$h(x)=\frac{5\cdot\ln(x)}{x}$$

$D=\mathbb{R}^+$

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\ln(x)}{x}\xrightarrow[N\to 0]{Z\to-\infty}-\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} h(x)=\lim_{x\to \infty}\frac{5\cdot\ln(x)}{x}\xrightarrow[\frac{\infty}{\infty}]{L'Hospital}\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot\frac{1}{x}}{1}\xrightarrow[N\to 1]{Z\to 0} 0$$

Symmetrie: *keine wegen D*

Nullstellen: $h(x)=\frac{5\cdot\ln(x)}{x}=0\;\rightarrow\;5\cdot\ln(x)=0\;\rightarrow\;x=e^0=1$

Ableitung:

$$h'(x)=\frac{5\cdot\frac{1}{x}\cdot x-5\cdot\ln(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{5-5\cdot\ln(x)}{x^2}$$

$$h''(x)=\frac{-\frac{5}{x}\cdot x^2-\left[5-5\cdot\ln(x)\right]\cdot 2x}{x^4}=\frac{-5x-\left[5-5\cdot\ln(x)\right]\cdot 2x}{x^4}=\frac{-5-\left[5-5\cdot\ln(x)\right]\cdot 2}{x^3}=\frac{10\cdot\ln(x)-15}{x^3}$$

Extrema:

$$h'(x)=\frac{5-5\cdot\ln(x)}{x^2}=0\;\rightarrow\;5-5\cdot\ln(x)=0\;\rightarrow\;\ln(x)=1\;\rightarrow\;x=e$$

$$h''(e)=\frac{10\cdot\ln(e)-15}{e^3}=\frac{-5}{e^3}<0\;\rightarrow\;Max\left(e\;\middle|\;\frac{5}{e}\right)$$

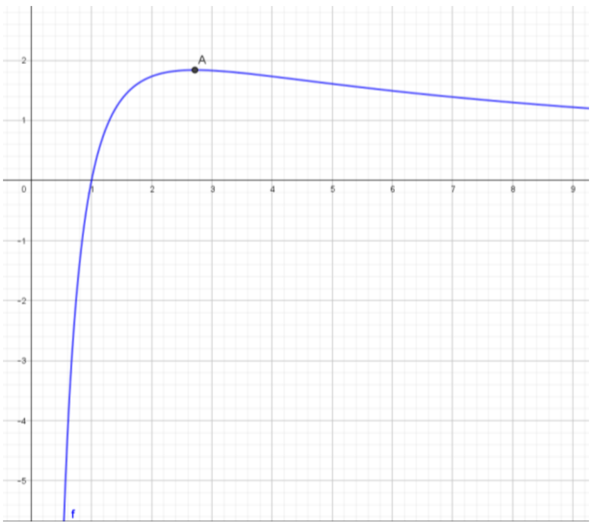
Wendepunkt:

$$h''(x)=\frac{10\cdot\ln(x)-15}{x^3}=0\;\rightarrow\;10\cdot\ln(x)-15=0\;\rightarrow\;\ln(x)=1{,}5\;\rightarrow\;x=e^{1{,}5}\;\rightarrow\;W\left(e^{1{,}5}\;\middle|\;\frac{7{,}5}{e^{1{,}5}}\right)$$

Steigungen:

in Nullstelle: $h'(1)=\frac{5-5\cdot\ln(1)}{1^2}=5$

in Wendestelle: $h'(e^{1{,}5})=\frac{5-5\cdot\ln(e^{1{,}5})}{(e^{1{,}5})^2}=-\frac{2{,}5}{e^3}\approx-0{,}1245$



Lösungen: $$t(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\mathit{Definitionsbereich:}\ \xrightarrow{\mathit{Bedingung}}\ \frac{x^2+1}{x}>0$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathit{Fall\ 1:}\quad Z>0\quad \mathit{und}\quad N>0\ \rightarrow\ x^2>-1\quad \mathit{und}\quad x>0\ \rightarrow\ x>0\\ \mathit{Fall\ 2:}\quad Z<0\quad \mathit{und}\quad N<0\ \rightarrow\ x^2<-1\ \ \mathit{nicht\ definiert}\end{array}\right\}\quad D=\mathbb{R}^+$$

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\ \rightarrow\ \ln(\text{"}0+\infty\text{"})\ \rightarrow\ \infty$$

$$\lim_{x\to \infty}h(x)=\lim_{x\to \infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)\ \rightarrow\ \ln(\text{"}\infty+0\text{"})\ \rightarrow\ \infty$$

$$\mathit{Symmetrie:}\quad t(-x)=\ln\left(\frac{(-x)^2+1}{(-x)}\right)=\ln\left(\frac{x^2+1}{(-x)}\right)\rightarrow \mathit{Nenner\ nicht\ definiert}\ \rightarrow\ \mathit{keine\ Symmetrie\ wegen\ D}$$

$$\mathit{Nullstellen:}\quad t(x)=\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=0\ \rightarrow\ x^2+1=0\ \rightarrow\ x^2=-1\ \rightarrow\ \mathit{keine\ Nullstellen}$$

Ableitung:

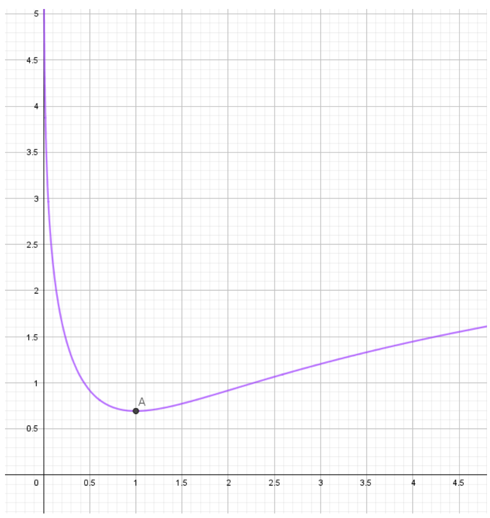
$$t'(x)=\frac{1}{\frac{x^2+1}{x}}\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{x}{x^2+1}\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)=\frac{x^2-1}{x^3+x}$$

$$t''(x)=\frac{2x(x^3+x)-(x^2-1)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}=\frac{2x^4+2x^2-3x^4+2x^2+1}{(x^3+x)^2}=\frac{-x^4+4x^2+1}{(x^3+x)^2}$$

Extrema:

$$t'(x)=\frac{x^2-1}{x^3+x}=0\ \rightarrow\ x^2-1=0\ \rightarrow\ x=\pm 1\ \xrightarrow{\mathit{Def.-Menge}}\ x=1$$

$$t''(1)=\frac{-1^4+4\cdot 1^2+1}{(1^3+1)^2}=1>0\ \rightarrow\ \mathit{Min}(1\mid \ln 2)$$



Wendepunkt:

$$t''(x)=\frac{-x^4+4x^2+1}{(x^3+x)^2}=0\ \rightarrow\ -x^4+4x^2+1=0$$

$$\rightarrow\ x_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+4}}{-2}=\frac{-4\pm 2\sqrt{5}}{-2}=2\mp\sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{\mathit{Def.-Menge}}\ x=2+\sqrt{5}\approx 4,24\ \rightarrow\ W(4,24\mid 1,5)$$

$$\mathit{Steigung:}\ \rightarrow \mathit{in\ Wendestelle:}\quad t'(4,24)=\frac{4,24^2-1}{4,24^3+4,24}\approx 0,21$$

Lösungen: $k(x)=\dfrac{x^2}{2\cdot\ln(x)}$

Definitionsbereich:

$$\xrightarrow{Bedingungen} \ln(x)>0 \;\rightarrow\; x>0 \quad und \quad N\neq 0 \;\rightarrow\; 2\cdot\ln(x)\neq 0 \;\rightarrow\; \ln(x)\neq 0 \;\rightarrow\; x\neq 1$$

$$\rightarrow\; D=\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$$

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0}k(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\cdot\ln(x)} \;\rightarrow\; \frac{"0"}{"-\infty"} \;\rightarrow\; 0$$

$$\lim_{x\to\infty}k(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2\cdot\ln(x)} \xrightarrow[L'Hospital]{\frac{\infty}{\infty}} =\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}x^2 \;\rightarrow\; \infty$$

$$\lim_{x\to 1+h}k(x)=\lim_{x\to 1+h}\frac{(1+h)^2}{2\cdot\ln((1+h))} \;\rightarrow\; \frac{1}{0^+} \;\rightarrow\; \infty$$

$$\lim_{x\to 1-h}k(x)=\lim_{x\to 1-h}\frac{(1-h)^2}{2\cdot\ln((1-h))} \;\rightarrow\; \frac{1}{0^-} \;\rightarrow\; -\infty$$

Symmetrie: $k(-x)=\dfrac{(-x)^2}{2\cdot\ln(-x)}=\left(\dfrac{x^2}{2\cdot\ln(-x)}\right)\rightarrow$ *Nenner nicht definiert* $\rightarrow$ *keine Symmetrie wegen D*

Nullstellen: $k(x)=\dfrac{x^2}{2\cdot\ln(x)}=0 \;\rightarrow\; x^2=0$ *keine Nullstellen wegen D*

Ableitung:

$$k'(x)=\frac{4x\ln x-2x^2\cdot\frac{1}{x}}{[2\cdot\ln(x)]^2}=\frac{4x\ln x-2x}{[2\cdot\ln(x)]^2}=\frac{4x\ln x}{[2\cdot\ln(x)]^2}-\frac{2x}{[2\cdot\ln(x)]^2}=\frac{4x\ln x}{4\cdot\ln(x)\cdot\ln(x)}-\frac{2x}{4\cdot[\ln(x)]^2}=\frac{x}{\ln(x)}-\frac{x}{2\cdot[\ln(x)]^2}$$

oder: $k'(x)=\dfrac{4x\ln x-2x^2\cdot\frac{1}{x}}{[2\cdot\ln(x)]^2}=\dfrac{4x\ln x-2x}{[2\cdot\ln(x)]^2}=\dfrac{2x(2\ln x-1)}{[2\cdot\ln(x)]^2}$

$$k''(x)=\frac{[4\ln x+4-2][2\cdot\ln(x)]^2-[4x\ln x-2x]2[2\cdot\ln(x)]\cdot\frac{2}{x}}{[2\cdot\ln(x)]^4}=\frac{[4\ln x+2][2\cdot\ln(x)]-[4x\ln x-2x]\cdot\frac{4}{x}}{[2\cdot\ln(x)]^3}$$

$$k''(x)=\frac{[4\ln x+2][2\cdot\ln(x)]-[4x\ln x-2x]\cdot\frac{4}{x}}{[2\cdot\ln(x)]^3}=\frac{8(\ln x)^2+4\ln x-16\ln x+8}{[2\cdot\ln(x)]^3}=\frac{8(\ln x)^2-12\ln x+8}{[2\cdot\ln(x)]^3}$$

$$k''(x)=\frac{8(\ln x)^2}{8\cdot[\ln(x)]^3}-\frac{12\ln x}{8\cdot[\ln(x)]^3}+\frac{8}{8\cdot[\ln(x)]^3}=\frac{1}{\ln x}-\frac{3}{2\cdot[\ln(x)]^2}+\frac{1}{[\ln(x)]^3}$$

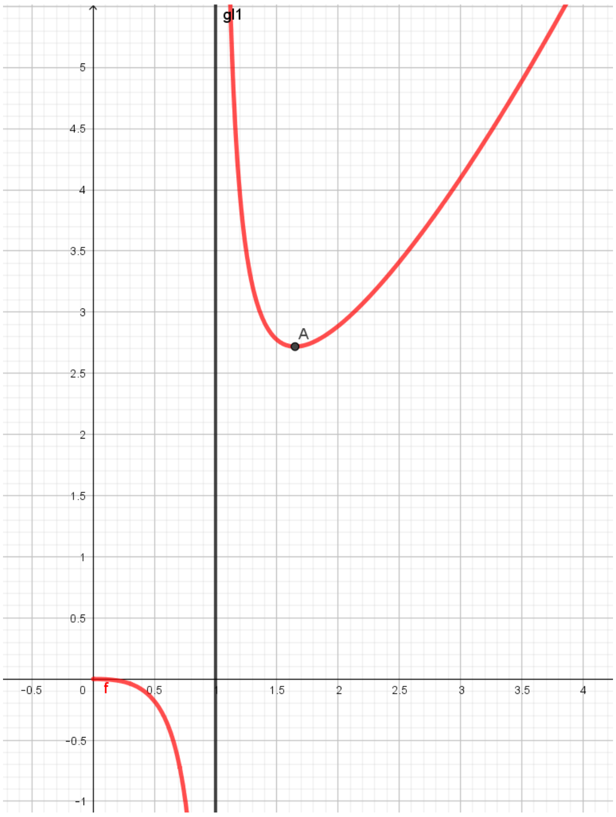
Extrema:

$$k'(x)=\frac{2x(2\ln x-1)}{[2\cdot\ln(x)]^2}=0 \;\rightarrow\; 2x=0\,[n.def.] \quad und \quad 2\ln x-1=0 \;\rightarrow\; x=\sqrt{e}\approx 1{,}65$$

$$k''(\sqrt{e})=\frac{8(\ln\sqrt{e})^2-12\ln(\sqrt{e})+8}{[2\cdot\ln(\sqrt{e})]^3}=2-6+8=4>0 \;\rightarrow\; Min(\sqrt{e}\mid e)$$

Wendepunkt:

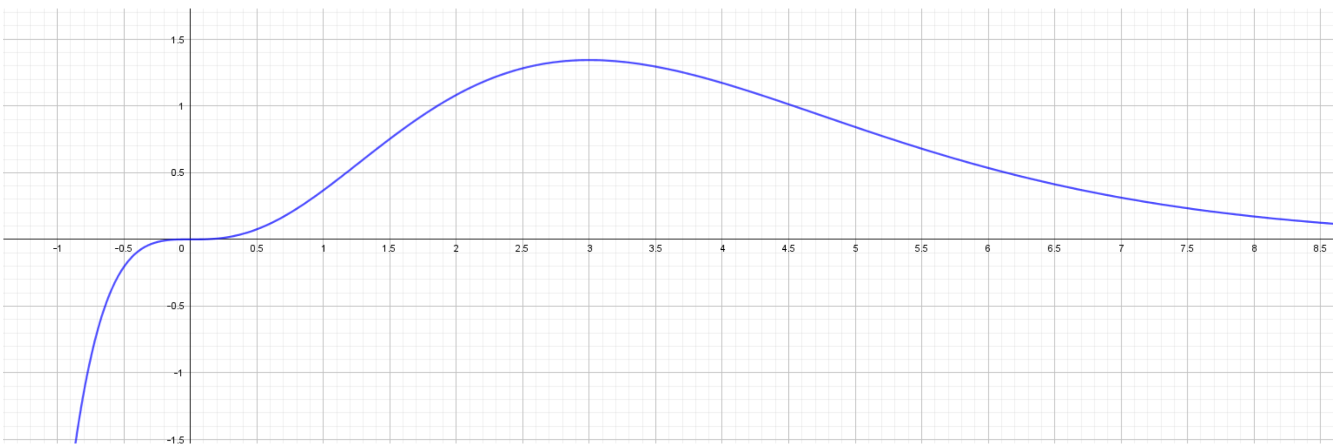
$$k''(x)=\frac{8(\ln x)^2-12\ln x+8}{[2\cdot\ln(x)]^3}=0 \xrightarrow[\ln x=u]{Substitution} 8u^2-12u+8=0 \;\rightarrow\; keine\ Lösung \;\rightarrow\; kein\ Wendepunkt$$



Exponentialfunktionen:

$f(x)=\frac{x^3}{e^x}$	$g(x)=\frac{5(x+1)}{e^{x^2}}$	$h_k(x)=\frac{e^x}{x^k}\quad mit\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$
$t(x)=e^x-x-1$	$k(x)=\frac{6}{1+e^x}$	

Lösungen: $f(x)=\frac{x^3}{e^x}$



$$Definitionsbereich: \xrightarrow{Bedingung} Nenner \neq 0 \xrightarrow{Kontrolle} e^x = 0 \rightarrow x = \ln(0)\ nicht\ definiert$$

$$\rightarrow D = \mathbb{R}$$

$Grenzwerte:$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{e^x} \rightarrow \frac{-\infty}{0^+} \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} \underset{L'Hospital}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} \underset{L'Hospital}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x} \underset{L'Hospital}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} \rightarrow 0$$

$Symmetrie: \quad keine\ Symmetrie\ wegen\ e^x$

$$Nullstellen: \quad f(x) = \frac{x^3}{e^x} = 0 \rightarrow x^3 = 0 \rightarrow x = 0\left[dreifach \rightarrow Sattelpunkt\right]$$

$Ableitung:$

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot e^x - x^3 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{3x^2 - x^3}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{\left(6x - 3x^2\right) \cdot e^x - \left(3x^2 - x^3\right) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x^3 - 6x^2 + 6x}{e^x}$$

$Extrema:$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - x^3}{e^x} = 0 \rightarrow x^2(3 - x) = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 0\left[doppelt \rightarrow kein\ Extremum \rightarrow Sattelpunkt\right] \quad und \quad x_2 = 3$$

$$f''(3) = \frac{3^3 - 6 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3}{e^x} < 0 \rightarrow Max\left(3 \;\middle|\; \frac{27}{e^3}\right)$$

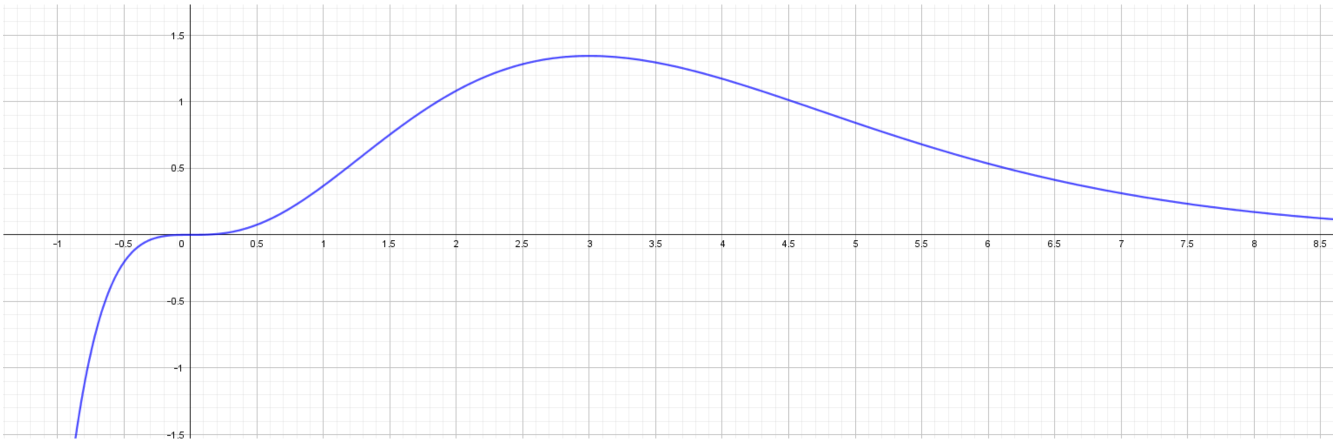
$Wendepunkt:$

$$f''(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 6x}{e^x} = 0 \rightarrow \left(x^2 - 6x + 6\right)x = 0 \rightarrow x_3 = 0$$

$$\rightarrow x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3} \rightarrow 3\ Wendestellen$$

$Steigung:$

$$\rightarrow in\ Wendestellen: \quad f'(1{,}27) \approx 0{,}78 \quad und \quad f'(4{,}73) = \frac{3x^2 - x^3}{e^x} \approx -0{,}34 \quad und \quad f'(0) = 0[SP]$$



Lösungen: $g\left(x\right)=\frac{5\left(x+1\right)}{e^{x^2}}$

$\mathit{Definitionsbereich:} \xrightarrow{\mathit{Bedingung}} \mathit{Nenner} \neq 0 \xrightarrow{\mathit{Kontrolle}} e^{x^2}=0 \rightarrow x^2=\ln\left(0\right) \mathit{nicht\ definiert}$

$\rightarrow D=\mathbb{R}$

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to-\infty} g\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{5\left(x+1\right)}{e^{x^2}} \underset{L'Hospital}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{2x\cdot e^{x}} \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x\to\infty} g\left(x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5\left(x+1\right)}{e^{x^2}} \underset{L'Hospital}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{5}{2x\cdot e^{x}} \rightarrow 0^+$$

$$\mathit{Symmetrie:}\quad g\left(-x\right)=\frac{5\left(-x+1\right)}{e^{\left(-x\right)^2}}=\frac{-5x+5}{e^{x^2}}\neq g\left(x\right) \quad \mathit{und} \quad \neq -g\left(x\right) \rightarrow \mathit{keine\ Symmetrie}$$

$$\mathit{Nullstellen:}\quad g\left(x\right)=\frac{5\left(x+1\right)}{e^{x^2}}=0 \rightarrow x=-1$$

Ableitung:

$$g'\left(x\right)=\frac{5e^{x^2}-5\left(x+1\right)\cdot 2x\cdot e^{x^2}}{\left[e^{x^2}\right]^2}=\frac{5-10x\cdot\left(x+1\right)}{e^{x^2}}=\frac{-10x^2-10x+5}{e^{x^2}}$$

$$g''\left(x\right)=\frac{\left(-20x-10\right)\cdot e^{x^2}-\left(-10x^2-10x+5\right)\cdot 2x\cdot e^{x^2}}{\left[e^{x^2}\right]^2}=\frac{-20x-10+20x^3+20x^2-10x}{e^{x^2}}$$

$$g''\left(x\right)=\frac{20x^3+20x^2-30x-10}{e^{x^2}}=10\cdot\frac{2x^3+2x^2-3x-1}{e^{x^2}}$$

Extrema:

$$g'\left(x\right)=\frac{-10x^2-10x+5}{e^{x^2}}=0 \rightarrow x_{1/2}=\frac{10\pm\sqrt{100+200}}{-20}=\frac{10\pm10\sqrt{3}}{-20}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{-2}$$

$\rightarrow x_1\approx-1{,}37 \quad \mathit{und} \quad x_2\approx 0{,}37$

$$g''\left(0{,}37\right)=10\cdot\frac{2\cdot\left(0{,}37\right)^3+2\cdot\left(0{,}37\right)^2-3\cdot\left(0{,}37\right)-1}{e^{\left(0{,}37\right)^2}}<0 \rightarrow \mathit{Max}\left(0{,}37 \mid 5{,}97\right) \rightarrow \mathit{Min}\left(-1{,}37 \mid -0{,}28\right)$$

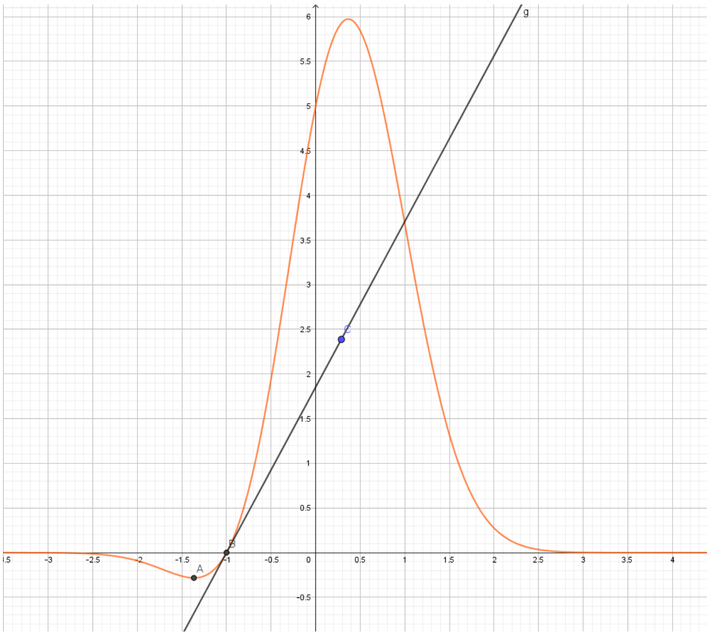
Wendepunkt:

$$g''\left(x\right)=10\cdot\frac{2x^3+2x^2-3x-1}{e^{x^2}}=0 \rightarrow 2x^3+2x^2-3x-1=0 \rightarrow x_1=-1{,}71 \quad x_2=-0{,}29 \quad x_3=1$$

Steigung:

$\rightarrow$ *in Nullstelle:* $g'\left(-1\right)=\frac{5}{e}\approx 1{,}84$

$\rightarrow$ *in Wendestellen:* $g'\left(-1{,}71\right)\approx-0{,}38 \quad \mathit{und} \quad g'\left(-0{,}29\right)\approx 6{,}49 \quad \mathit{und} \quad g'\left(1\right)\approx-5{,}52$



Lösungen: $h_k(x)=\dfrac{e^x}{x^k} \quad mit\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$Definitionsbereich: \xrightarrow{Bedingung} Nenner\neq 0 \xrightarrow{Kontrolle} x^k=0 \rightarrow x=0 \rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Grenzwerte:

Fall 1: $k=2t\,[gerade]$

$$\lim_{x\to-\infty} h_k(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^k} \rightarrow \frac{0}{(-\infty)^k}=\frac{0}{\infty^k} \rightarrow 0^+ \quad und \quad \lim_{x\to\infty} h_k(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^k} \underset{L'Hospital}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{k!} \rightarrow \infty$$

[Annäherung von links]

$$\lim_{x\to0-\lambda} h_k(x)=\lim_{x\to0-\lambda}\frac{e^x}{x^k} \xrightarrow[Binomischer\ LS]{} \frac{1}{(-\lambda)^k}=\frac{1}{\lambda^k} \rightarrow \frac{1}{0^+} \xrightarrow{k=2t} \infty$$

und [Annäherung von rechts]

$$\lim_{x\to0+\lambda} h_k(x)=\lim_{x\to0+\lambda}\frac{e^x}{x^k} \xrightarrow[Binomischer\ LS]{} \frac{1}{\lambda^k} \rightarrow \frac{1}{0^+} \xrightarrow{k=2t} \infty$$

Fall 2: $k=2t+1\,[ungerade]$

$$\lim_{x\to-\infty} h_k(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^k} \rightarrow \frac{0}{(-\infty)^k}=\frac{0}{-\infty^k} \rightarrow 0^- \quad und \quad \lim_{x\to\infty} h_k(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^k} \underset{L'Hospital}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{k!} \rightarrow \infty$$

[Annäherung von links]

$$\lim_{x\to0-\lambda} h_k(x)=\lim_{x\to0-\lambda}\frac{e^x}{x^k} \xrightarrow[Binomischer\ LS]{} \frac{1}{(-\lambda)^k}=\frac{1}{-\lambda^k} \rightarrow \frac{1}{0^-} \xrightarrow{k=2t} -\infty$$

und [Annäherung von rechts]

$$\lim_{x\to0+\lambda} h_k(x)=\lim_{x\to0+\lambda}\frac{e^x}{x^k} \xrightarrow[Binomischer\ LS]{} \frac{1}{\lambda^k} \rightarrow \frac{1}{0^+} \xrightarrow{k=2t} \infty$$

$Symmetrie:\quad keine\ Symmetrie\ wegen\ Grenzwerten$

$$Nullstellen:\quad h_k(x)=\frac{e^x}{x^k}=0 \quad\rightarrow\quad e^x=0\ nicht\ definiert \quad\rightarrow\quad keine\ Nullstelle$$

$Ableitung:$

$$h_k'(x)=\frac{e^x\cdot x^k-e^x\cdot k\cdot x^{k-1}}{x^{2k}}=\frac{e^x-e^x\cdot k\cdot\frac{1}{x}}{x^k}=\frac{e^x\left(1-\frac{k}{x}\right)}{x^k}$$

$$h_k''(x)=\frac{\left[e^x\left(1-\frac{k}{x}\right)+e^x\cdot\frac{k}{x^2}\right]x^k-\left[e^x\left(1-\frac{k}{x}\right)\right]\cdot k\cdot x^{k-1}}{x^{2k}}=\frac{\left[e^x\left(1-\frac{k}{x}\right)+e^x\cdot\frac{k}{x^2}\right]-\left[e^x\left(1-\frac{k}{x}\right)\right]\cdot\frac{k}{x}}{x^k}$$

$$h_k''(x)=\frac{e^x}{x^k}\left(\frac{k^2+k}{x^2}-\frac{2k}{x}+1\right)$$

$Extrema:$

$$h_k'(x)=\frac{e^x\left(1-\frac{k}{x}\right)}{x^k}=0 \quad\rightarrow\quad 1-\frac{k}{x}=0 \quad\rightarrow\quad x=k$$

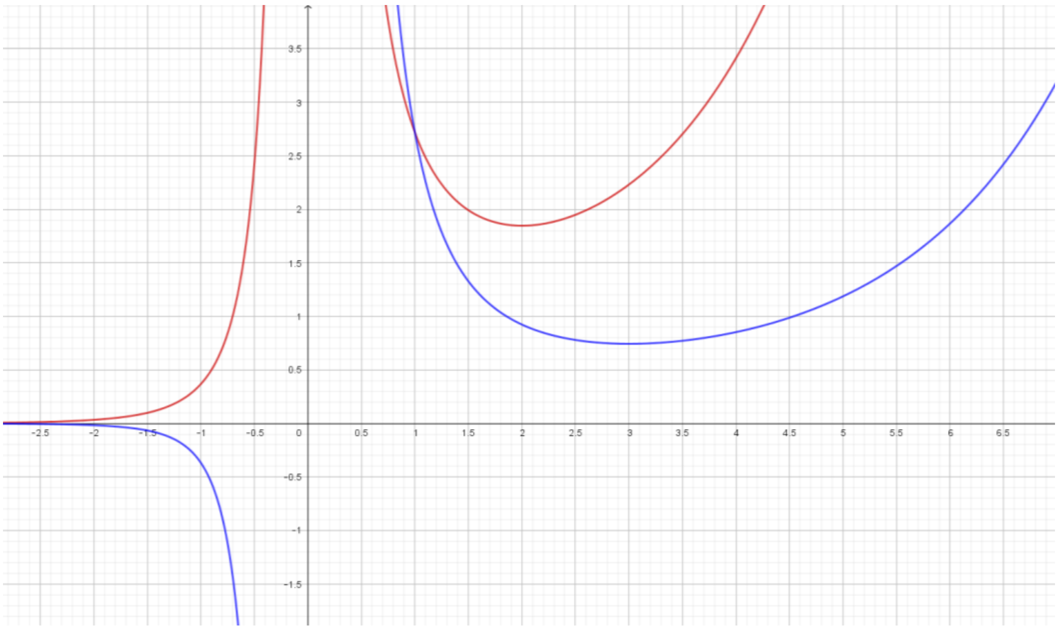
$$h_k''(k)=\frac{e^k}{k^k}\left(\frac{k^2+k}{k^2}-\frac{2k}{k}+1\right)=\frac{e^k}{k^k}\cdot\frac{1}{k}>0 \quad\rightarrow\quad Min\left(k\ \middle|\ \frac{e^k}{k^k}\right)$$

$$h_k(x)=\frac{e^x}{x^k}\quad mit\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$$

$Wendepunkt:$

$$h_k''(x)=\frac{e^x}{x^k}\left(\frac{k^2+k}{x^2}-\frac{2k}{x}+1\right)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{k^2+k}{x^2}-\frac{2k}{x}+1=0 \quad\rightarrow\quad x^2-2kx+k^2+k=0$$

$$\rightarrow\quad x_{1/2}=\frac{2k\pm\sqrt{4k^2-4k^2-4k}}{2}=k\pm\sqrt{-k}\quad nicht\ definiert\ wegen\ k\in\mathbb{N}$$



Lösungen: $t\left(x\right)=e^{x}-x-1$

$Definitionsbereich: \quad \rightarrow \quad D=\mathbb{R}$

$Grenzwerte:$

$\lim\limits_{x\rightarrow-\infty} t\left(x\right)=\lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\left(e^{x}-x-1\right)\rightarrow "\left(0+\infty-1\right)" \quad \rightarrow \quad \infty$

$\lim\limits_{x\rightarrow\infty} t\left(x\right)=\lim\limits_{x\rightarrow\infty}\left(e^{x}-x-1\right)\xrightarrow[\text{"}\infty-\infty\text{"}]{L'Hospital}\lim\limits_{x\rightarrow\infty}\left(e^{x}-1\right) \quad \rightarrow \quad \infty$

$Symmetrie: \quad t\left(-x\right)=e^{\left(-x\right)}-\left(-x\right)-1=\frac{1}{e^{x}}+x-1\neq g\left(x\right) \quad und \quad \neq -g\left(x\right) \quad \rightarrow \quad keine\ Symmetrie$

$Nullstellen: \quad t\left(x\right)=e^{x}-x-1=0 \quad \rightarrow \quad e^{x}=x+1 \quad \rightarrow \quad x=0$

$hier\ trivial\ aber\ ansonsten:$

$numerische\ Lösung \quad \rightarrow \quad Newton-Iteration \quad oder \quad WTR$

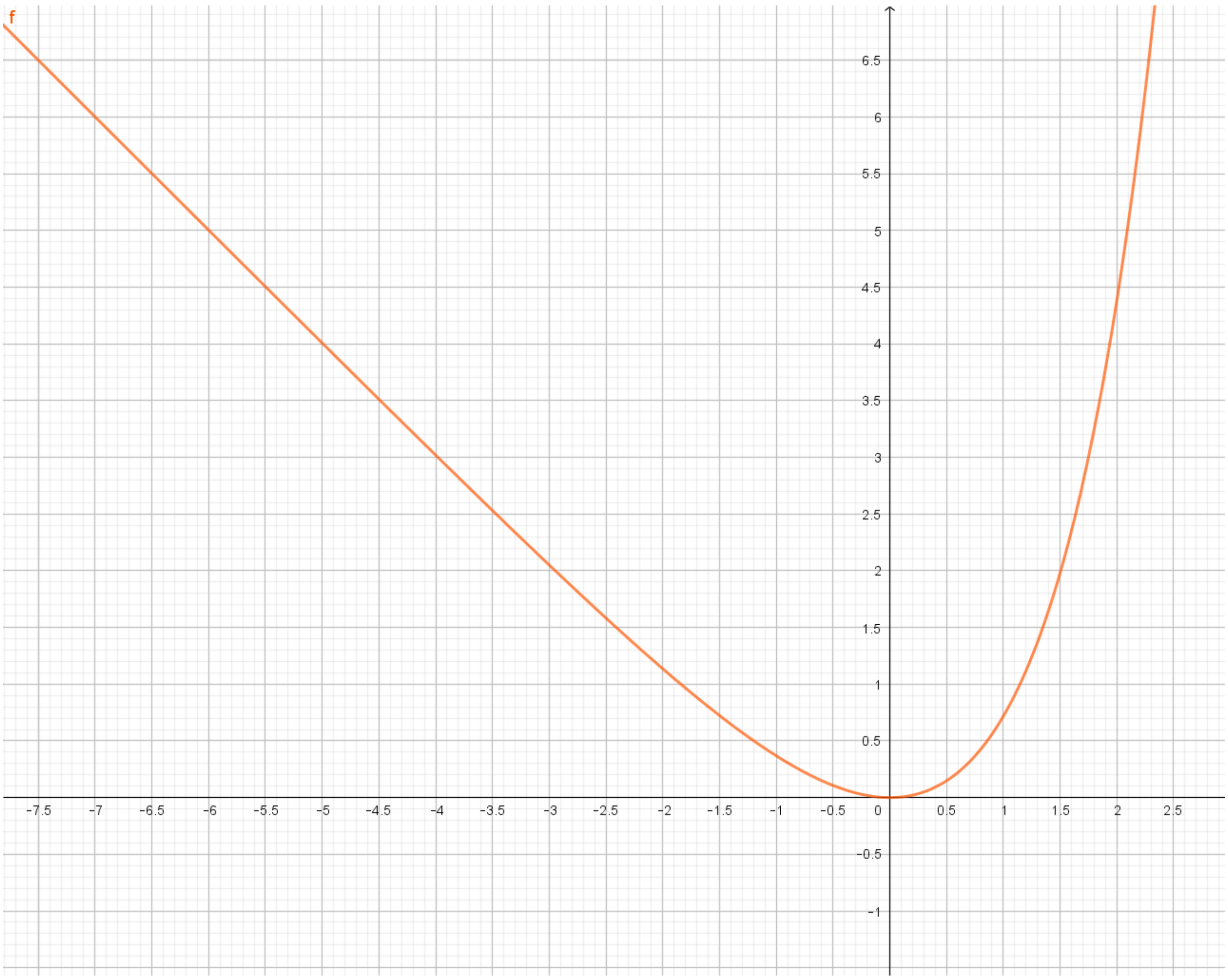
$oder\ graphische\ Lösung$

$Ableitung: \quad t'\left(x\right)=e^{x}-1 \quad und \quad t''\left(x\right)=e^{x}$

$Extrema: \quad t'\left(x\right)=e^{x}-1=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad t''\left(0\right)=1>0 \quad \rightarrow \quad Min\left(0 \mid 0\right)$

$Wendepunkt: \quad t''\left(x\right)=e^{x}\neq 0 \quad \rightarrow \quad keine\ Wendestelle$

$Steigung: \quad \rightarrow in\ Nullstelle: \quad t'\left(0\right)=0$



Lösungen: $k(x)=\dfrac{6}{1+e^x}$

Definitionsbereich: $\xrightarrow{\text{Bedingung}}$ $Nenner \neq 0$ $\xrightarrow{\text{Kontrolle}}$ $e^x+1=0 \;\rightarrow\; e^x=-1$ *nicht definiert*
$\rightarrow \; D=\mathbb{R}$

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6}{1+e^x} \;\rightarrow\; \dfrac{6}{1+0} \;\rightarrow\; 6$ *und* $\lim\limits_{x\to\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{1+e^x} \;\rightarrow\; \dfrac{6}{1+\infty} \;\rightarrow\; 0^+$

Symmetrie: $k(-x)=\dfrac{6}{1+e^{-x}}\neq g(x)$ *und* $\neq -g(x) \;\rightarrow$ *keine Symmetrie*

Nullstellen: $k(x)=\dfrac{6}{1+e^x}=0 \;\rightarrow\; 6=0 \;\rightarrow$ *keine Nullstelle*

Ableitung:

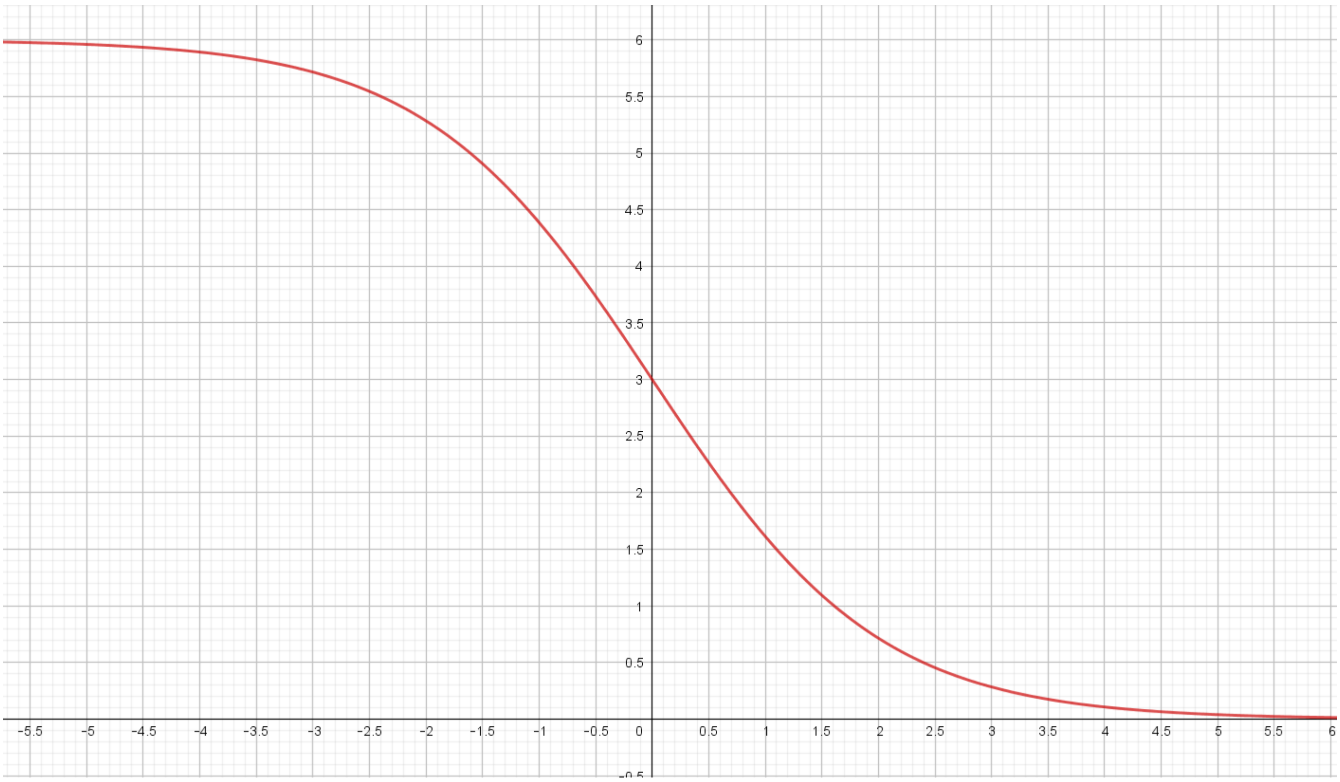
$$k'(x)=\frac{-6\cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$

$$k''(x)=\frac{-6\cdot e^x\cdot\left(1+e^x\right)^2-\left[-6\cdot e^x\cdot 2\left(1+e^x\right)\cdot e^x\right]}{\left(1+e^x\right)^4}=\frac{-6\cdot e^x\cdot\left(1+e^x\right)+12\cdot e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^3}=\frac{6\cdot e^{2x}-6e^x}{\left(1+e^x\right)^3}=\frac{6\cdot e^x\left(e^x-1\right)}{\left(1+e^x\right)^3}$$

Extrema: $k'(x)=\dfrac{-6\cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=0 \;\rightarrow\; -6\cdot e^x=0 \;\rightarrow$ *keine Lösung* $\rightarrow$ *keine Extrema*

Wendepunkt: $k''(x)=\dfrac{6\cdot e^x\left(e^x-1\right)}{\left(1+e^x\right)^3}=0 \;\rightarrow\; e^x-1=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; W(0\mid 3)$

Steigung: $\rightarrow$ *in Wendestelle*: $k'(0)=\dfrac{-6\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^2}=-1{,}5$

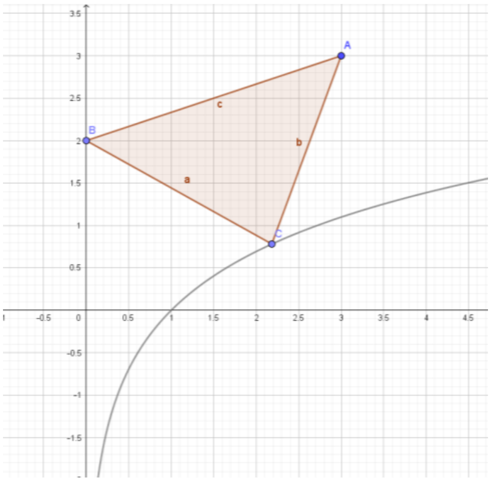


Extremwertaufgaben

Aufgabe 1:

Die Punkte A(3|3) und B(0|2) sind gegeben; der Punkt C liegt auf der Kurve $f(x) = \ln(x)$.
Das Dreieck ABC soll minimalen Flächeninhalt haben. Welche Koordinaten hat C?

Lösung:



$$A_\Delta(x) = \frac{1}{2} \cdot Det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ x & \ln x & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot Det\left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ x & \ln x & 1 & x & \ln x \end{array}\right)$$

$$A_\Delta(x) = \frac{1}{2} \cdot [0 + 2x + 3\ln x - 3x - 0 - 6] = \frac{1}{2} \cdot [3\ln x - x - 6]$$

$$A_\Delta{}'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3}{x} - 1\right] = 0$$

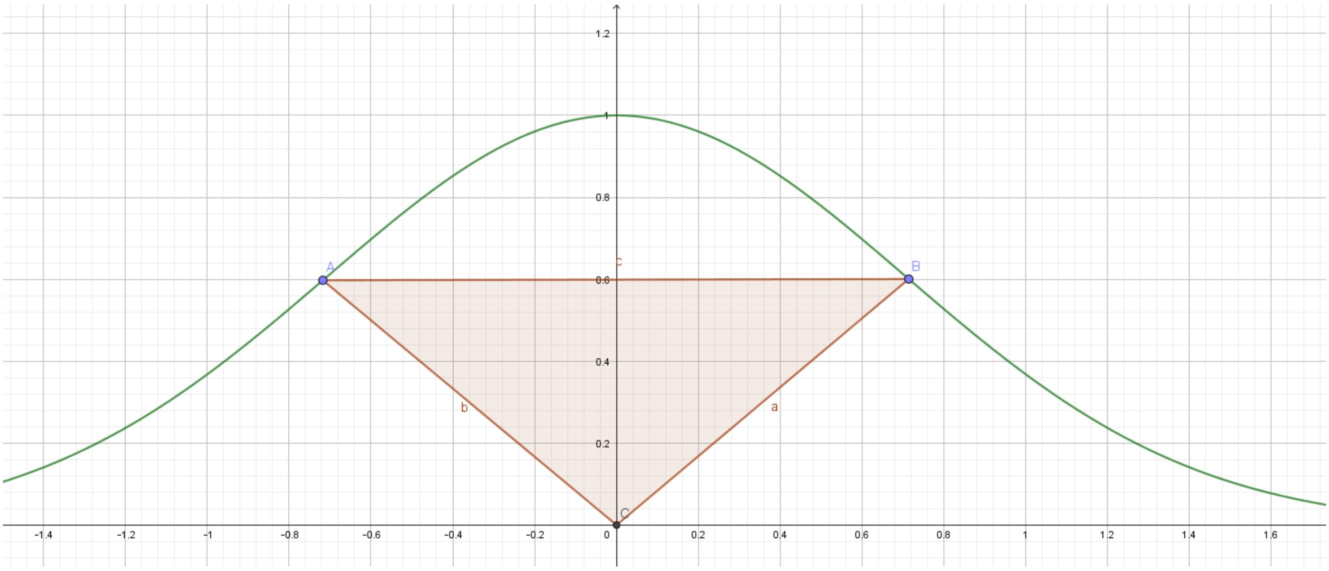
$$\rightarrow \quad \frac{3}{x} - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{x} = 1 \quad \rightarrow \quad x = 3 \quad \rightarrow \quad C(3 \mid \ln 3)$$

Aufgabe 2: Gegeben ist folgende Funktion: $f\left(x\right)=e^{-x^2}$

Der Ursprung des Koordinatensystems ist die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks;
die Endpunkte der Basis liegen auf dem Graphen von f. Das Dreieck soll maximalen Flächeninhalt haben.

Welche Koordinaten haben die Endpunkte der Basis?

Lösung:



Grundlegende Gedanken: symmetrischer Kurvenverlauf; Gauß-Verteilungskurve

⇨ Betrachtung der Hälfte des Dreiecks im I. Quadranten mit y-Achse als Spiegelachse

$$A_\Delta\left(x\right)=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h \xrightarrow[h\,\hat{=}\,y\text{–}Wert]{g\,\hat{=}\,x\text{–}Wert} A_\Delta\left(x\right)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot f\left(x\right) \xrightarrow{f(x)=e^{-x^2}} A_\Delta\left(x\right)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-x^2}$$

$$A_\Delta'\left(x\right)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{-x^2}+\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-x^2}\cdot\left(-2x\right)=0$$

$$A_\Delta'\left(x\right)=\frac{1}{2}\cdot e^{-x^2}\cdot\left(1-2x^2\right)=0 \rightarrow \left|x\right|=\frac{1}{2}\sqrt{2} \rightarrow A\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\;\middle|\;e^{-0,5}\right)\rightarrow A\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\;\middle|\;\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \rightarrow B\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\;\middle|\;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$A_\Delta''\left(x\right)=\frac{1}{2}\cdot e^{-x^2}\cdot\left(-2x\right)\cdot\left(1-2x^2\right)+\frac{1}{2}\cdot e^{-x^2}\cdot\left(-4x\right)=\frac{1}{2}\cdot e^{-x^2}\left(4x^3-6x\right)$$

$$A_\Delta''\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot e^{-0,5}\left[4\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3-6\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot e^{-0,5}\left[\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right]=\left(-\sqrt{2}\right)\cdot e^{-0,5}<0 \rightarrow Max$$

Gesamt – Fläche:

$$2\cdot A_\Delta\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \;=\; 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}} \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Aufgabe 3:

Im Punkt P(u|v) (u>1) der Kurve $f(x)=\ln(x)$ werden die Parallele zur y-Achse und die Kurvennormale gezeichnet. Diese beiden Geraden begrenzen zusammen mit der x- Achse ein Dreieck.
Dieses soll maximalen Flächeninhalt haben.

Welche Koordinaten hat in diesem Falle der Punkt P?

Lösung:
Grundlegende Gedanken: Steigung der Tangente in P ermitteln; Normalensteigung

⇨ Fläche des Dreiecks: Grundlinie (Strecke von u bis Schnitt Normale/x-Achse) – Höhe: f(u) = v

$$\text{Steigung der Funktion } f(x)=\ln x \text{ in } P(u \mid v) \quad \rightarrow \quad P(u \mid \ln u)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \quad \xrightarrow[m=f'(x)]{x=u} \quad m_t=\frac{1}{u}$$

$$\text{Normalensteigung}: \quad m_t \cdot m_n=-1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{u}\cdot m_n=-1 \quad \rightarrow \quad m_n=-u$$

$$\text{Normalengleichung}:$$

$$n(x)=m_n\cdot x+b \quad \xrightarrow[m_n=-u]{f(u)=\ln u} \quad \ln u=-u\cdot u+b \quad \rightarrow \quad b=\ln u+u^2 \quad \rightarrow \quad n(x)=-u\cdot x+\ln u+u^2$$

$$\text{Nullstelle}:$$

$$n(x)=-u\cdot x+\ln u+u^2=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{\ln u}{u}+u$$

$$A_\Delta(x)=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h \quad \rightarrow \quad A_\Delta(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\ln u}{u}+u-u\right)\cdot\ln u=\frac{1}{2u}\cdot(\ln u)^2$$

$$A_\Delta'(x)=-\frac{1}{2u^2}\cdot(\ln u)^2+\frac{1}{2u}\cdot 2\cdot(\ln u)\cdot\frac{1}{u}=0$$

$$A_\Delta'(x)=\frac{1}{u^2}\cdot\ln u\left(-\frac{1}{2}\cdot\ln u+1\right)=0 \quad \xrightarrow[\text{wegen } u>1]{\frac{1}{u^2}\cdot\ln u\neq 0} \quad -\frac{1}{2}\cdot\ln u+1=0 \quad \rightarrow \quad \ln u=2 \quad \rightarrow \quad u=e^2$$

$$A_\Delta''(x)=-\frac{2}{u^3}\left(-\frac{1}{2}\cdot(\ln u)^2+\ln u\right)+\frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\ln u)\cdot\frac{1}{u}+\frac{1}{u}\right)$$

$$A_\Delta''(x)=-\frac{2}{u^3}\ln u\left(1-\frac{1}{2}\cdot\ln u\right)+\frac{1}{u^3}(1-\ln u)$$

$$\xrightarrow{u=e^2} \quad A_\Delta''(e^2)=-\frac{2}{e^6}\ln e^2\left(1-\frac{1}{2}\cdot\ln e^2\right)+\frac{1}{e^6}(1-\ln e^2)=-\frac{4}{e^6}(1-1)+\frac{1}{e^6}(1-2)=-\frac{1}{e^6}<0\rightarrow Max$$

$$\text{Gesamt}-\text{Fläche}:$$

$$A_\Delta(e^2) \quad = \quad \frac{1}{2e^2}\cdot(\ln e^2)^2 \quad = \quad \frac{4}{2e^2} \quad = \quad \frac{2}{e^2}$$