Der Logarithmus - Was ist der Logarithmus – eine kleine Auffrischung des Wissens 😉

Teil 2:

Rechenregeln für Logarithmen

Für Logarithmen gelten die folgenden Rechenregeln:

1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ Aus „mal" wird „plus".

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ Aus „durch" wird „minus".

3) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$ Aus „hoch r" wird „mal r".

Übung 2: **Zerlegen Sie die Terme so weit wie möglich**

$$a)\quad \ln\left(\frac{5 \cdot x^2}{y \cdot z}\right) = \ln(5 \cdot x^2) - \ln(y \cdot z) = \ln(5) + 2 \cdot \ln(x) - \ln(y) - \ln(z)$$

$$b)\quad \lg\left[\frac{(42 \cdot x^2 - 1)^{10}}{y^5 + 3}\right] = 10 \cdot \lg(42 \cdot x^2 - 1) - \lg(y^5 + 3)$$

$$c)\quad \ln\left(\frac{e^2 \cdot x^2}{y \cdot \sqrt{z}}\right) = \ln(e^2 \cdot x^2) - \ln(y \cdot \sqrt{z}) = 2\ln(e) + 2\ln(x) - \ln(y) - \frac{1}{2}\ln(z)$$

$$\ln\left(\frac{e^2 \cdot x^2}{y \cdot \sqrt{z}}\right) = 2 + 2\ln(x) - \ln(y) - \frac{1}{2}\ln(z)$$

$$d)\quad \lg\left[\frac{100 \cdot (x^2 + y)^2}{x - y}\right] = \lg\left[100 \cdot (x^2 + y)^2\right] - \lg(x - y) = \lg 100 + 2\lg(x^2 + y) - \lg(x - y)$$

$$\lg\left[\frac{100 \cdot (x^2 + y)^2}{x - y}\right] = 2 + 2\lg(x^2 + y) - \lg(x - y)$$

Übung 3
Aufgaben:

$$\log_2(3x-1)+\log_2(x+5)=6 \qquad L=\{3\}$$

$$\log_3(5x-1)+\log_3(9x+9)=5 \qquad L=\{2\}$$

$$\log_5(10x+25)-\log_5(x-5)=2 \qquad L=\{10\}$$

$$\log_{10}(7x+51)+\log_{10}(15x-5)=4 \qquad L=\{7\}$$

$$\log_2(40x+24)-\log_2(7x+1)=3 \qquad L=\{1\}$$

$$\log_2(2x-2)+\log_2(x+1)=\log_2(4x+4) \qquad L=\{3\}$$

$$\log_3(10x+7)-\log_3(4x+1)=\log_3(2x-1) \qquad L=\{2\}$$

$$\log_2(10x+24)-\log_2(x-84)=\log_2(x-36) \qquad L=\{100\}$$

Gerechnete Lösungen/Lösungswege ausführlich

$$\log_2(3x-1)+\log_2(x+5)=6$$

Def.–Menge:

$$3x-1>0 \quad\rightarrow\quad x>\frac{1}{3} \qquad und \qquad x+5>0 \quad\rightarrow\quad x>-5$$

$$\rightarrow\quad D=\left\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\wedge x>\frac{1}{3}\right\}$$

Lösen der Gleichung:

$$\log_2(3x-1)+\log_2(x+5)=6 \xrightarrow{\text{log-Regel 1}} \log_2\left[(3x-1)\cdot(x+5)\right]=6$$

$$\xrightarrow{\text{Ausmultiplizieren}} \log_2\left(3x^2+14x-5\right)=6 \xrightarrow{\text{Umformen Log-Gleichung}} 3x^2+14x-5=2^6$$

$$\xrightarrow{\text{Umformen}} 3x^2+14x-69=0 \quad\rightarrow\quad x_1=3 \quad und \quad x_2=-\frac{23}{3} \quad\rightarrow\quad L=\{3\}$$

$\log_3(5x-1)+\log_3(9x+9)=5$

$Def.-Menge:$

$5x-1>0 \quad\rightarrow\quad x>0{,}2 \qquad und \qquad 9x+9>0 \quad\rightarrow\quad x>-1$

$\rightarrow\quad D=\{x \mid x\in\mathbb{R}\wedge x>0{,}2\}$

Lösen der Gleichung:

$\log_3(5x-1)+\log_3(x+1)+\log_3 9=5 \xrightarrow{\text{log-Regel 1}} \log_3\left[(5x-1)\cdot(x+1)\right]=3$

$\xrightarrow{\text{Ausmultiplizieren}} \log_3\left(5x^2+4x-1\right)=3 \xrightarrow{\text{Umformen Log-Gleichung}} 5x^2+4x-1=3^3$

$\xrightarrow{\text{Umformen}} 5x^2+4x-28=0 \quad\rightarrow\quad x_1=2 \quad und \quad x_2=-2{,}8 \quad\rightarrow\quad L=\{2\}$

$\log_5(10x+25)-\log_5(x-5)=2$

$Def.-Menge:$

$10x+25>0 \quad\rightarrow\quad x>-2{,}5 \qquad und \qquad x-5>0 \quad\rightarrow\quad x>5$

$\rightarrow\quad D=\{x \mid x\in\mathbb{R}\wedge x>5\}$

Lösen der Gleichung:

$\log_5(10x+25)-\log_5(x-5)=2 \xrightarrow{\text{log-Regel 2}} \log_5\left(\frac{10x+25}{x-5}\right)=2$

$\xrightarrow{\text{Umformen Log-Gleichung}} \frac{10x+25}{x-5}=5^2 \xrightarrow{\text{Ausmultiplizieren}} 10x+25=25(x-5)$

$\xrightarrow{\text{Umformen}} 15x=150 \quad\rightarrow\quad x=10 \quad\rightarrow\quad L=\{10\}$

$\log_{10}(7x+51)+\log_{10}(15x-5)=4$

$Def.-Menge:$

$7x+51>0 \quad\rightarrow\quad x>-\frac{51}{7} \qquad und \qquad 15x-5>0 \quad\rightarrow\quad x>-\frac{1}{3}$

$\rightarrow\quad D=\left\{x \mid x\in\mathbb{R}\wedge x>-\frac{1}{3}\right\}$

Lösen der Gleichung:

$\log_{10}(7x+51)+\log_{10}(15x-5)=4 \xrightarrow{\text{log-Regel 1}} \log_{10}\left[(7x+51)\cdot(15x-5)\right]=4$

$\xrightarrow{\text{Ausmultiplizieren}} \log_{10}\left(105x^2+730x-255\right)=4$

$\xrightarrow{\text{Umformen Log-Gleichung}} 105x^2+730x-255=10^4$

$\xrightarrow{\text{Umformen}} 105x^2+730x-10.255=0 \quad\rightarrow\quad x_1=7 \quad und \quad x_2=-13{,}95 \quad\rightarrow\quad L=\{7\}$

$$\log_2(40x+24)-\log_2(7x+1)=3$$

$Def.-Menge:$

$$40x+24>0 \quad \rightarrow \quad x>-0{,}6 \qquad und \qquad 7x+1>0 \quad \rightarrow \quad x>-\frac{1}{7}$$

$$\rightarrow \quad D=\left\{x \mid x\in\mathbb{R} \wedge x>-\frac{1}{7}\right\}$$

Lösen der Gleichung:

$$\log_2(40x+24)-\log_2(7x+1)=3 \xrightarrow{\text{log-Regel 1}} \log_2\left[8\cdot(5x+3)\right]-\log_2(7x+1)=3$$

$$\xrightarrow{\text{log-Regel 1}} \log_2 8+\log_2(5x+3)-\log_2(7x+1)=3$$

$$\xrightarrow{\text{log-Regel 2}} \log_2\left(\frac{5x+3}{7x+1}\right)=0 \xrightarrow{\text{Umformen Log-Gleichung}} \frac{5x+3}{7x+1}=2^0$$

$$\xrightarrow{\text{Ausmultiplizieren}} 5x+3=7x+1 \xrightarrow{\text{Umformen}} 2x=2 \quad \rightarrow \quad x=1 \quad \rightarrow \quad L=\{1\}$$

$$\log_2(2x-2)+\log_2(x+1)=\log_2(4x+4)$$

$Def.-Menge:$

$$2x-2>0\rightarrow x>1 \quad und \quad x+1>0\rightarrow x>-1 \quad und \quad 4x+4>0\rightarrow x>-1$$

$$\rightarrow \quad D=\{x \mid x\in\mathbb{R}\wedge x>1\}$$

Lösen der Gleichung:

$$\log_2(2x-2)+\log_2(x+1)=\log_2(4x+4)$$

$$\xrightarrow{-\log_2(4x+4)} \log_2(2x-2)+\log_2(x+1)-\log_2(4x+4)=0$$

$$\xrightarrow{\text{log-Regel 2}} \log_2(2x-2)+\log_2\left(\frac{x+1}{4x+4}\right)=0$$

$$\rightarrow \quad \log_2(2x-2)+\log_2\left[\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{x+1}\right)\right]=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \log_2(2x-2)-2=0 \xrightarrow{\text{Umformen Log-Gleichung}} 2x-2=2^2$$

$$\rightarrow \quad x=3 \quad \rightarrow \quad L=\{3\}$$

$$\log_3(10x+7)-\log_3(4x+1)=\log_3(2x-1)$$

$Def.-Menge:$

$10x+7>0 \rightarrow x>-0{,}7 \quad und \quad 4x+1>0 \rightarrow x>-0{,}25 \quad und \quad 2x-1>0 \rightarrow x>0{,}5$

$\rightarrow \quad D=\{x \mid x\in\mathbb{R} \wedge x>0{,}5\}$

Lösen der Gleichung:

$$\log_3(10x+7)-\log_3(4x+1)=\log_3(2x-1)$$

$$\xrightarrow{-\log_3(2x-1)} \quad \log_3(10x+7)-\log_3(4x+1)-\log_3(2x-1)=0$$

$$\xrightarrow{\text{log-Regel 1+2}} \quad \log_3\left[\frac{10x+7}{(4x+1)\cdot(2x-1)}\right]=0$$

$$\rightarrow \quad \frac{10x+7}{8x^2-2x-1}=3^0 \quad \rightarrow \quad 10x+7=8x^2-2x-1$$

$$\rightarrow \quad 8x^2-12x-8=0 \quad \rightarrow \quad x_1=2 \quad und \quad x_2=-0{,}5 \quad \rightarrow \quad L=\{2\}$$

$$\log_2(10x+24)-\log_2(x-84)=\log_2(x-36)$$

$Def.-Menge:$

$10x+24>0 \rightarrow x>-2{,}4 \quad und \quad x-84>0 \rightarrow x>84 \quad und \quad x-36>0 \rightarrow x>36$

$\rightarrow \quad D=\{x \mid x\in\mathbb{R} \wedge x>84\}$

Lösen der Gleichung:

$$\log_2(10x+24)-\log_2(x-84)=\log_2(x-36)$$

$$\xrightarrow{-\log_2(x-36)} \quad \log_2(10x+24)-\log_2(x-84)-\log_2(x-36)=0$$

$$\xrightarrow{\text{log-Regel 2}} \quad \log_2\left[\frac{10x+24}{(x-84)\cdot(x-36)}\right]=0 \quad \rightarrow \quad \frac{10x+24}{x^2-120x+3.024}=2^0$$

$$\rightarrow \quad 10x+24=x^2-120x+3.024 \quad \rightarrow \quad x^2-130x+3.000=0$$

$$\rightarrow \quad x_1=100 \quad und \quad x_2=30 \quad \rightarrow \quad L=\{100\}$$