Der Logarithmus - Was ist der Logarithmus – eine kleine Auffrischung des Wissens 😉

Teil 2:

Rechenregeln für Logarithmen

Für Logarithmen gelten die folgenden Rechenregeln:

1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ — Aus „mal" wird „plus".

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ — Aus „durch" wird „minus".

3) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$ — Aus „hoch r" wird „mal r".

Übung 4

$\ln(3x-5) + \ln(15-8x) = \ln(6x-11) + \ln(7-4x)$

Lösung:

$$\ln(3x-5) - \ln(15-8x) = \ln(6x-11) + \ln(7-4x)$$

$$Def.-Menge:$$

$$3x-5>0 \rightarrow x > \frac{5}{3} \approx 1{,}67 \quad und \quad 15-8x>0 \rightarrow x < \frac{15}{8} = 1{,}875$$

$$und \quad 6x-11>0 \rightarrow x > \frac{11}{6} \approx 1{,}833 \quad und \quad 7-4x>0 \rightarrow x < \frac{7}{4} = 1{,}75$$

$$\rightarrow \quad D = \text{keine Definitionsmenge möglich, wegen } x > \frac{11}{6} \approx 1{,}833 \; und \; x < \frac{7}{4} = 1{,}75$$

Zur Demo - Lösen der Gleichung:

$$\ln(3x-5) - \ln(15-8x) = \ln(6x-11) + \ln(7-4x)$$

$$\rightarrow \quad \ln(3x-5) - \ln(15-8x) - \ln(6x-11) - \ln(7-4x) = 0$$

$$\rightarrow \quad \ln\left[\frac{3x-5}{(15-8x)\cdot(6x-11)\cdot(7-4x)}\right] = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{3x-5}{192x^3 - 1.048x^2 + 1.906x - 1.155} = e^0$$

$$\rightarrow \quad 3x-5 = 192x^3 - 1.048x^2 + 1.906x - 1.155 \quad \rightarrow \quad 192x^3 - 1.048x^2 + 1.903x - 1.150 = 0$$

$$\rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad L = \varnothing$$

$\lg(x+30)-\lg(x+10)=\lg(x+60)-\lg(x+20)$

Lösung:

$$\lg(x+30)-\lg(x+10)=\lg(x+60)-\lg(x+20)$$

Def.-Menge:

$$x+30>0\to x>-30 \quad und \quad x+10>0\to x>-10$$

$$und \quad x+60>0\to x>-60 \quad und \quad x+20>0\to x>-20$$

$$\to \quad D=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\wedge x>-10\}$$

Lösen:

$$\lg(x+30)-\lg(x+10)=\lg(x+60)-\lg(x+20)\to \lg\frac{x+30}{x+10}=\lg\frac{x+60}{x+20}$$

$$\to 10^{\lg\frac{x+30}{x+10}}=10^{\lg\frac{x+60}{x+20}}\to \frac{x+30}{x+10}=\frac{x+60}{x+20}\to (x+30)\cdot(x+20)=(x+60)\cdot(x+10)$$

$$\to x^2+50x+600=x^2+70x+600\to 20x=0\to x=0\to L=\{0\}$$

$\lg x^5-\lg x^2=\lg 8$

Lösung:

$$\lg x^5-\lg x^2=\lg 8 \quad\to\quad 5\lg x-2\lg x=\lg 8 \quad\to\quad 3\lg x=\lg 8$$

$$\to\quad 3\lg x=\lg 2^3 \quad\to\quad 3\lg x=3\lg 2 \quad\to\quad x=2$$

oder

$$\lg x^5-\lg x^2=\lg 8 \quad\to\quad \lg\frac{x^5}{x^2}=\lg 8 \quad\to\quad \lg x^3=\lg 8 \quad\to\quad x^3=8 \quad\to\quad x=2$$

$5\lg x-2\lg x^2=1{,}20412$

Lösung:

$$5\lg x-2\lg x^2=1{,}20412 \quad\to\quad 5\lg x-4\lg x=1{,}20412 \quad\to\quad \lg x=1{,}20412 \quad\to\quad x=10^{1{,}20412}=16$$

$\ln(5x+12)+\ln(5x-12)=\ln 81$

Lösung:

$$\ln(5x+12)+\ln(5x-12)=\ln 81$$

Def.-Bereich:

$$5x+12>0\to x>-2{,}4 \quad und \quad 5x-12>0\to x>2{,}4$$

$$\to \quad D=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\wedge x>2{,}4\}$$

Lösen:

$$\ln(5x+12)+\ln(5x-12)=\ln 81 \quad\to\quad \ln\left[(5x+12)\cdot(5x-12)\right]=\ln 81$$

$$\to\quad \ln(25x^2-144)=\ln 81 \quad\to\quad e^{\ln(25x^2-144)}=e^{\ln 81} \quad\to\quad 25x^2-144=81$$

$$\to\quad 25x^2=225 \quad\to\quad x^2=9 \quad\to\quad x_1=3 \quad oder \quad x_2=-3 \quad\to\quad L=\{3\}$$

$\lg(2x+5)+2=2{,}9542-\lg(2x+5)$

Lösung:

$$\lg(2x+5)+2=2{,}9542-\lg(2x+5)$$

$$Def.-Bereich:$$

$$2x+5>0 \to x>-2{,}5 \quad \to \quad D=\{x \mid x\in\mathbb{R} \wedge x>-2{,}5\}$$

$$Lösen:$$

$$\lg(2x+5)+2=2{,}9542-\lg(2x+5) \quad \to \quad 2\lg(2x+5)=0{,}9542$$

$$\to \quad \lg(2x+5)=0{,}4771 \quad \to \quad 2x+5=10^{0{,}4771}\approx 3 \quad \to \quad x=-1 \quad \to \quad L=\{-1\}$$

$x\cdot\lg 10=\lg 100$

Lösung:

$$x\cdot\lg 10=\lg 100 \quad \to \quad x\cdot\lg 10=\lg 10^2 \quad \to \quad x\cdot\lg 10=2\cdot\lg 10 \quad \to \quad x=2 \quad \to \quad L=\{2\}$$

$x\cdot\lg 3=0{,}95424$

Lösung:

$$x\cdot\lg 3=0{,}95424 \quad \to \quad x=\frac{0{,}95424}{\lg 3} \quad \to \quad x=2 \quad \to \quad L=\{2\}$$

$2\ln(x+3)-3\ln(x+2)+\ln(x+1)=0$

Lösung:

$$2\ln(x+3)-3\ln(x+2)+\ln(x+1)=0$$

$$Def.-Bereich:$$

$$x+3>0 \to x>-3 \quad und \quad x+2>0 \to x>-2 \quad und \quad x+1>0 \to x>-1$$

$$\to \quad D=\{x \mid x\in\mathbb{R} \wedge x>-1\}$$

$$Lösen:$$

$$2\ln(x+3)-3\ln(x+2)+\ln(x+1)=0 \quad \to \quad \ln(x+3)^2-\ln(x+2)^3+\ln(x+1)=0$$

$$\to \quad \ln\frac{(x+3)^2\cdot(x+1)}{(x+2)^3}=0 \quad \to \quad \ln\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+6x^2+12x+8}=0$$

$$\to \quad x^3+7x^2+15x+9=e^0\cdot\left(x^3+6x^2+12x+8\right) \quad \to \quad x^2+3x+1=0$$

$$\to \quad x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\approx -0{,}382 \quad oder \quad x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\approx -2{,}62 \quad \to \quad L=\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

$\lg(x-3) = 0{,}90309 + \lg x - \lg(x+3)$

Lösung:

$$\lg(x-3) = 0{,}90309 + \lg x - \lg(x+3)$$
$$Def.-Bereich:$$
$$x-3>0 \to x>3 \quad und \quad x>0 \quad und \quad x+3>0 \to x>-3 \quad \to \quad D=\{x \mid x\in\mathbb{R} \wedge x>3\}$$
$$Lösen:$$
$$\lg(x-3) = 0{,}90309 + \lg x - \lg(x+3) \quad \to \quad \lg(x-3)+\lg(x+3)-\lg x = 0{,}90309$$
$$\to \quad \lg\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x} = 0{,}90309 \quad \to \quad \frac{x^2-9}{x} = 10^{0{,}90309} \approx 8$$
$$\to \quad x^2-8x-9=0 \quad \to \quad x_1=-1 \quad \vee \quad x_2=9 \quad \to \quad L=\{9\}$$

$x^{\lg x} = 1$

Lösung:

$$D \;=\; \{x \mid x\in\mathbb{R} \wedge x>0\} \;=\; \mathbb{R}^+$$
$$x^{\lg x}=1 \xrightarrow{x^0=1} x^{\lg x}=x^0=1 \quad \to \quad \lg x=0 \quad \to \quad x=10^0=1 \quad \to \quad L=\{1\}$$

$x^{\lg x} = 10$

Lösung:

$$D \;=\; \{x \mid x\in\mathbb{R} \wedge x>0\} \;=\; \mathbb{R}^+$$
$$x^{\lg x}=10 \xrightarrow{10^1=10} \lg x=1 \quad \to \quad x=10^1=10 \quad \to \quad L=\{10\}$$

$x^{\lg x} = 10000$

Lösung:

$$D \;=\; \{x \mid x\in\mathbb{R} \wedge x>0\} \;=\; \mathbb{R}^+$$
$$x^{\lg x}=10.000=10^4=100^2 \xrightarrow[mit\ x=10]{\lg x=4} \lg x=4??? \xleftrightarrow{Widerspruch} \log_{10}10=1$$
$$x^{\lg x}=10.000=10^4=100^2 \xrightarrow[mit\ x=100]{\lg x=2} \lg x=2 \quad \to \quad x=10^2=100 \quad \to \quad L=\{100\}$$