Untersuchung der ln-Funktion mit Parameter-Variationen

$$f_{a,b,c,d}(x) \quad = \quad a \cdot \ln(bx+c)+d$$

Funktion der Parameter bzw. welche Änderung im Kurvenverlauf bewirkt eine Variation der Parameter:

a => Spiegelung an der x-Achse / Krümmungsvariation
b => Spiegelung an der y-Achse / Krümmungsvariation
c => Variation auf der x-Achse (Nullstelle)
d => Variation auf der y-Achse (y-Achsenabschnitt)

⇨ **Die ln-Funktion ist die Umkehrfunktion zur e-Funktion**

Da die Definitionsmenge der ln-Funktion nur die positiven x-Werte sind, muss gelten:

Argument des Logarithmus muss positiv sein => $f(x)=\ln(bx+c) \xleftrightarrow{\text{Definitionsmenge}} bx+c>0$

Herleitung der Ableitung:

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=??? \rightarrow f(x) = \ln(x) \xrightarrow[\text{Exponentialgleichung}]{e \text{ als Basis}} e^{f(x)} = e^{\ln(x)}=x$$

Bilden der Ableitung:

$$\left[e^{f(x)}\right]' = \left[e^{\ln(x)}\right]'=[x]' \xrightarrow{\text{Ableitung: Kettenregel}} e^{f(x)} \cdot f(x)' = 1 \rightarrow f(x)' = \frac{1}{e^{f(x)}}$$

$$\text{Auswertung:} \quad f(x)' = \frac{1}{e^{f(x)}} \overset{f(x)=\ln(x)}{=} \frac{1}{e^{\ln(x)}} \overset{e^{\ln(x)}=x}{=} \frac{1}{x}$$

$$\text{allgemein:} \quad f(x)=\ln(g(x)) \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x)=\frac{1}{g(x)}(g'(x))=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

Allgemein gilt demnach für die Ableitungstechnik der Logarithmusfunktion auf Basis der Kettenregel:

$$f(x)=\ln(ax^2+bx+c)$$

$$\text{Schritt 1: Ableitung der äußeren Funktion} \leftrightarrow \ln \rightarrow \frac{1}{\text{Argument}}$$

$$\text{Schritt 2: Ableitung der inneren Funktion} \leftrightarrow \text{Ableitung des Arguments}$$

$$f'(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c}(2ax^2+b)$$

Für eine allgemeine Basis a > 0 gilt: $f(x)=\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}=\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}\cdot\ln(x)$

Übung:

$$f(x) = \ln(3x)$$
$$f(x) = \ln(x^2)$$
$$f(x) = \ln(kx^3 - 4x)$$
$$f(x) = \ln(3x)^4$$
$$f(x) = x^2 \cdot \ln(2-x)$$
$$f(x) = 4x^2 - 3\cdot\ln(x^2 - 2x + 1)$$

Lösungen:

$$f(x) = \ln(3x) \xrightarrow{1.\ Ableitung} f'(x) = \frac{1}{3x}\cdot 3 = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln(x^2) \xrightarrow{1.\ Ableitung} f'(x) = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x}$$

$$f(x) = \ln(kx^3 - 4x) \xrightarrow{1.\ Ableitung} f'(x) = \frac{1}{kx^3 - 4x}(3kx^2 - 4)$$

$$f(x) = \ln(3x)^4 = 4\ln(3x) \xrightarrow{1.\ Ableitung} f'(x) = 4\cdot\frac{1}{3x}\cdot 3 = \frac{4}{x}$$

$$f(x) = \ln(3x)^4 \xrightarrow{1.\ Ableitung} f'(x) = \frac{1}{(3x)^4}\cdot 4(3x)^3\cdot 3 = \frac{1}{3x}\cdot 4\cdot 3 = \frac{1}{x}\cdot 4 = \frac{4}{x}$$

$$f(x) = x^2\cdot\ln(2-x) \xrightarrow{1.\ Ableitung} f'(x) = 2x\cdot\ln(2-x) + x^2\cdot\frac{1}{2-x}\cdot(-1) = 2x\cdot\ln(2-x) - \frac{x^2}{2-x}$$

$$f(x) = 4x^2 - 3\cdot\ln(x^2 - 2x + 1)$$

$$\xrightarrow{1.\ Ableitung} f'(x) = 8x - 3\cdot\frac{1}{x^2 - 2x + 1}(2x - 2) = 8x - 3\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\cdot 2(x-1) = 8x - \frac{6}{x-1}$$

Hausaufgaben:

S. 148 A1a - d Prüfen: Für welche x-Werte ist das Argument des ln größer als 0???

$$f(x) = \ln(x) \xrightarrow{Bedingung} x > 0$$

$$\rightarrow \quad D = \mathbb{R}^+ =]0;\infty[= \{x \mid 0 < x \wedge x \in \mathbb{R}\}$$

$$f(x) = \ln(x^2) \xrightarrow{Bedingung} x^2 > 0 \rightarrow x > 0 \vee x < 0$$

$$\rightarrow \quad D = \mathbb{R}\setminus\{0\} = \{x \mid x \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$$

$$f(x) = \ln(c\cdot x) \text{ mit } c<0 \xrightarrow{Bedingung} c\cdot x>0 \xrightarrow{c<0} x<0$$
$$\to \quad D=\mathbb{R}^- =]-\infty;0[= \{x \mid x<0 \wedge x\in\mathbb{R}\}$$

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right) \xrightarrow{Bedingung} \sqrt{x}>0 \xrightarrow{Quadrieren} x>0$$
$$\to \quad D=\mathbb{R}^+ =]0;\infty[= \{x \mid 0<x \wedge x\in\mathbb{R}\}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \text{ mit } x\neq -1 \xrightarrow{Bedingung} \frac{1-x}{1+x}>0$$
$$\xrightarrow{2\text{ Fälle}} \quad Fall\,1:\; Z(x)>0\wedge N(x)>0 \qquad Fall\,2:\; Z(x)<0\wedge N(x)<0$$

$Fall\,1:\; Z(x)>0\wedge N(x)>0$	$Fall\,2:\; Z(x)<0\wedge N(x)<0$
$\left.\begin{matrix} 1-x>0 & \to & x<1 \\ 1+x>0 & \to & x>-1 \end{matrix}\right\} \to \quad D=]-1;1[$	$\left.\begin{matrix} 1-x<0 & \to & x>1 \\ 1+x<0 & \to & x<-1 \end{matrix}\right\} \to \quad D=\varnothing$

$$Ergebnis: \quad \to \quad D=]-1;1[$$

$$f(x) = \ln(1+x) \xrightarrow{Bedingung} 1+x>0 \to x>-1$$
$$\to \quad D=]-1;\infty[= \{x>-1<x \wedge x\in\mathbb{R}\}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \text{ mit } x \neq -1 \xrightarrow{Bedingung} \frac{x}{x+1} > 0$$

$$\xrightarrow{\text{2 Fälle}} \quad Fall\,1: \; Z(x) > 0 \wedge N(x) > 0 \qquad Fall\,2: \; Z(x) < 0 \wedge N(x) < 0$$

$Fall\,1: \; Z(x) > 0 \wedge N(x) > 0$	$Fall\,2: \; Z(x) < 0 \wedge N(x) < 0$
$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x+1 > 0 \rightarrow x > -1 \end{array}\right\} \rightarrow D =]0;\infty[$	$\left.\begin{array}{l} x < 0 \\ x+1 < 0 \rightarrow x < -1 \end{array}\right\} \rightarrow D =]-\infty:-1[$

$$Ergebnis: \rightarrow D =]0;\infty[\;\cup\; D =]-\infty:-1[\;\rightarrow\; D = \mathbb{R} \setminus [-1;0]$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{c^2}{x}\right) \text{ mit } c \neq 0 \xrightarrow{Bedingung} \frac{c^2}{x} > 0 \rightarrow x > 0$$

$$\rightarrow D = \mathbb{R}^+ =]0;0[\infty = \{x \mid x > 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$$

S. 149 A2 alle

$$f(x) = 1 + \ln(x) \rightarrow f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = 2x + \ln(x) \rightarrow f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = 2x + \ln(2x) \rightarrow f'(x) = 2 + \frac{1}{2x} \cdot 2 = 2 + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^2 + \ln(tx) \rightarrow f'(x) = 2x + \frac{1}{tx} \cdot t = 2x + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot (-1)x^{-2} = x \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x^{-1}\right) = (-1)\ln(x) \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{t}{x}\right) = \ln\left(t \cdot x^{-1}\right) = (-1)\ln(t \cdot x) \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{t \cdot x} \cdot t = -\frac{1}{x}$$

$$f(t) = \ln\left(\frac{t}{x}\right) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{t}{x}\right)} \cdot \frac{1}{x} = \left(\frac{x}{t}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{t}$$

$$f(t) = \ln(t+x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(t+x)} \cdot 1 = \frac{1}{(t+x)}$$

Übungen: Def.-Menge und Ableitungen

⇨ **S. 149 / Nr. 3 und 150 / Nr. 13**

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right) = \ln\left(x^{0,5}\right) \rightarrow D = \mathbb{R}^+ =]0;\infty[= \{x \mid 0 < x \wedge x \in \mathbb{R}\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 0,5 \cdot x^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{x^{0,5}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right) = \ln\left(x^{0,5}\right) = \frac{1}{2}\ln x$$