Integralrechnung: Konsumenten- & Produzentenrente

1.) Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht und berechnen Sie danach die Konsumenten- und Produzentenrente.

$$p_A(x) = \frac{1}{6}x^2 + 1 \quad \text{und} \quad p_N(x) = 3 - \frac{1}{6}x$$

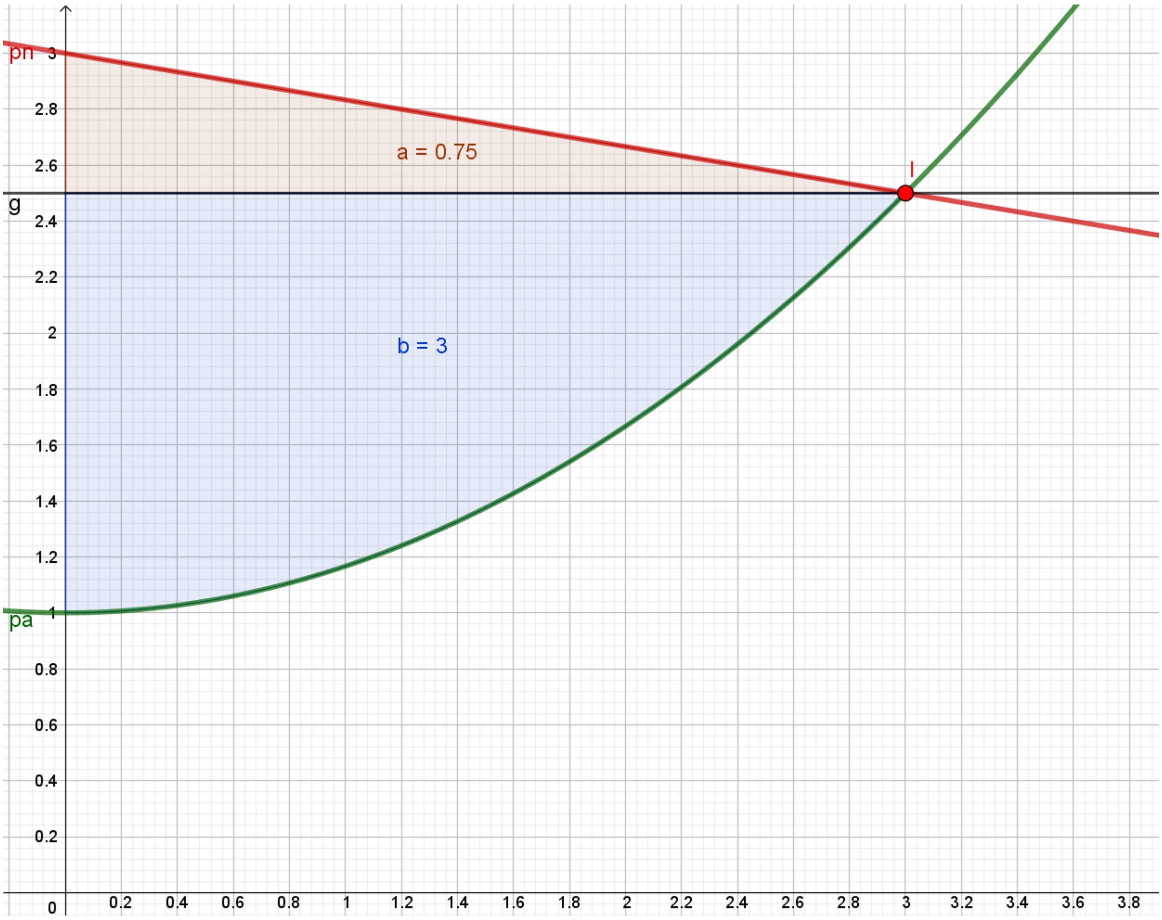
Lösung:

Konsumentenrente: **Das ist der Betrag in GE, den die Konsumenten insgesamt bereit zu zahlen gewesen wären, wenn jeder den für ihn höchsten akzeptablen Preis gezahlt hätte.**

$$K_R(x) = \int_0^{x_0} p_N(x)\,dx - x_0 \cdot p_N(x_0)$$

Produzentenrente: **Diejenigen Anbieter, die zu einem geringeren Preis verkauft hätten, erhalten dadurch einen zusätzlichen Gewinn, dessen Summe als Produzentenrente bezeichnet wird.**

$$P_R(x) = x_0 \cdot p_A(x_0) - \int_0^{x_0} p_A(x)\,dx$$



2.) Die Fußball-WM steht vor der Tür.

Die Angebotsfunktion von Autofahnen sei gegeben durch: $p_A(x) = 0{,}5 + \frac{1}{30}x$

Die Nachfragefunktion ist gegeben durch: $p_N(x) = 2{,}5 - \frac{1}{30}x$ mit p = Preis und x = Menge.

Bestimmen Sie die Sättigungsmenge, das Marktgleichgewicht und Kr und Pr bei vollständiger Konkurrenz.

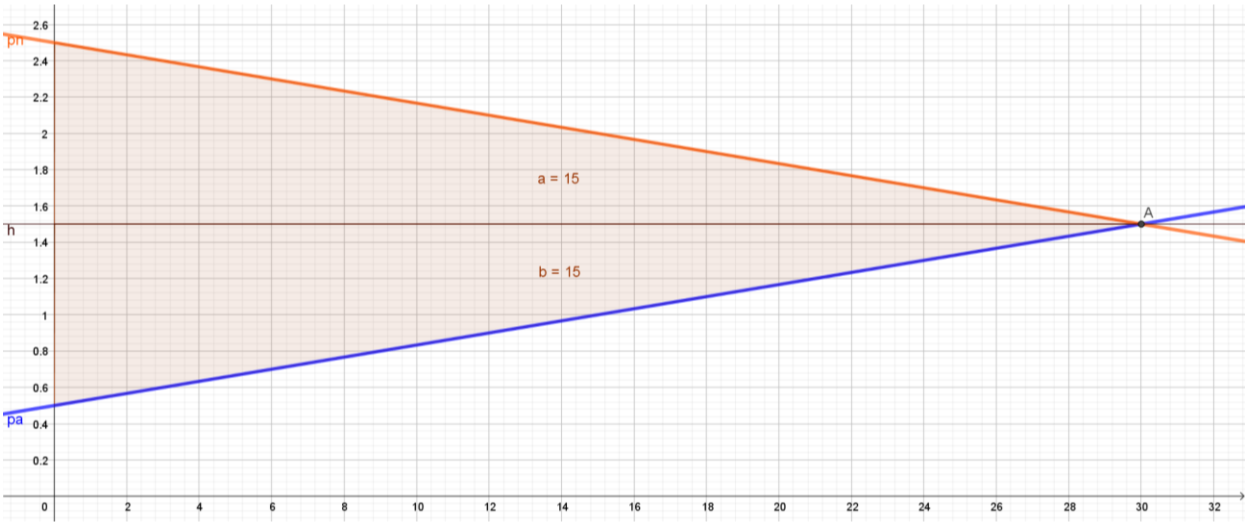
Lösung:

Sättigungsmenge: $p_n = 0$

$$p_N(x) = 2{,}5 - \frac{1}{30}x = 0 \xrightarrow{\textit{Sättigungsmenge}} x = 75$$

$$GGM = 30 \quad und \quad GGP = 1{,}5$$

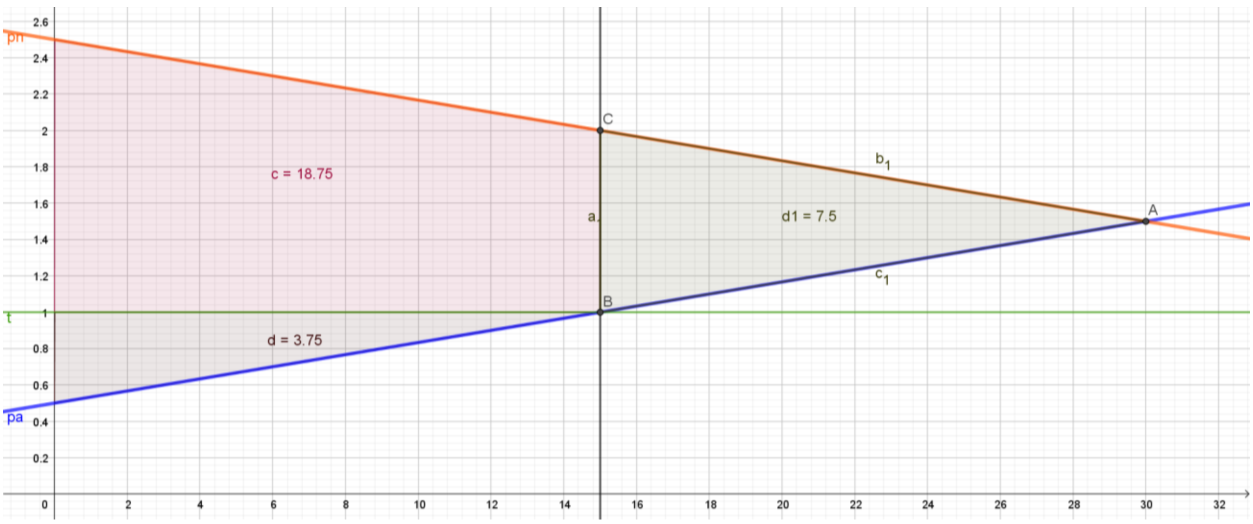
Graph mit Konsumenten- und Produzentenrente



Basierend auf den Angaben von Teil 1 der Aufgabe ist die Bundesregierung kurz von den Wahlen der Meinunge, dass jeder Bundesbürger zur Fußball-WM finanziell in der Lage sein sollte, sich eine Autofahne . kaufen zu können

Daher wird ein Höchstpreis pro Fahne von p = 1 eingeführt.

Berechnen Sie die neue Konsumenten-, Produzentenrente und den Verlust des Wohlfahrtsmaßes.



Kr = 18,75 Pr = 3,75 => Gesamt: 22,5 => Verlust Wohlfahrtsmaß: 7,5

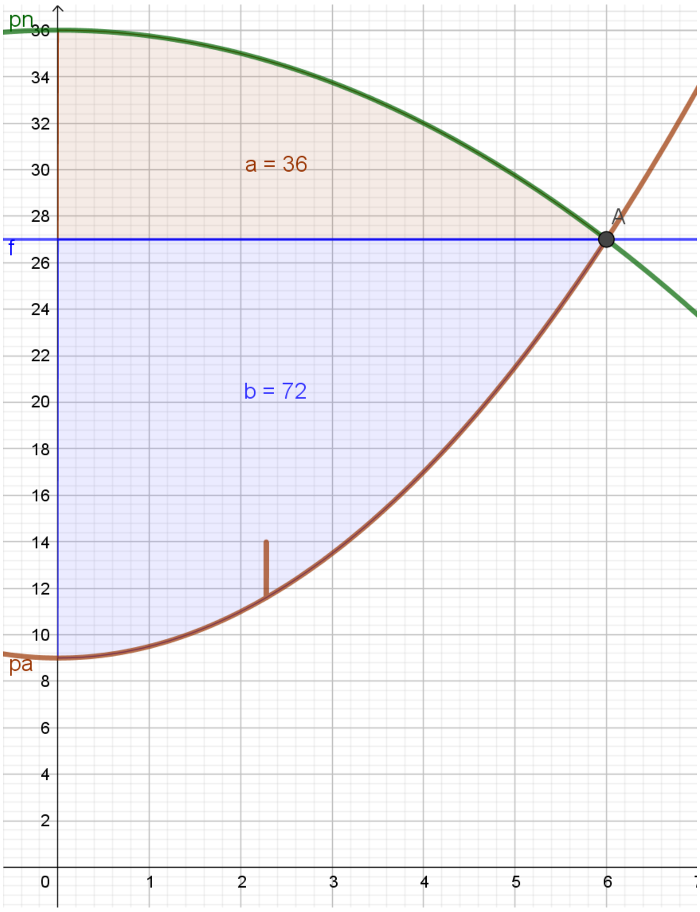
3.) Gegeben seien die Angebotsfunktion $p_A(x) = 0{,}5\,x^2 + 9$ und die Nachfragefunktion $p_N(x) = 36 - 0{,}25\,x^2$.
Man ermittle

a) das Marktgleichgewicht (Menge und Preis),

b) die Konsumentenrente und

c) die Produzentenrente.

Lösung:



Marktgleichgewicht:

$GGM = 6$ *und* $GGP = 27$

Kr = 36 **Pr = 72**

4.)

Am Markt für Autolacke gilt folgende Angebotsfunktion $p_A(x) = -0{,}25x^2 + 4x$ mit $x \in [0; 5]$, x gibt die Stückzahl in Mengeneinheiten (ME) an, $p_A(x)$ den Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE / ME). Bei der Nachfragefunktion wird von einer Funktionsgleichung der Form $p_N(x) = \frac{-1}{12}x^3 + x^2 - \frac{107}{12}x + 30$ ausgegangen.

a) Bestimmen Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich von $p_N(x)$

b) Skizzieren Sie die Funktionsgraphen der Nachfragefunktion p_N und der Angebotsfunktion p_A in ihrem ökonomisch relevanten Bereich.

c) Berechnen Sie die Konsumentenrente und die Produzentenrente.

d) Erklären Sie die ökonomische Bedeutung der Konsumentenrente und der Produzentenrente.

Lösung:

Ökonomisch sinnvoller Definitionsbereich liegt zwischen dem Höchstpreis (x = 0) und der Sättigungsmenge

$$p_N(x) \quad = \quad -\frac{1}{12}x^3 + x^2 - \frac{107}{12}x + 30 \quad = \quad 0 \quad \xrightarrow{\textit{Sättigungsmenge}} \quad x \quad = \quad 5$$

Konsumentenrente: **Das ist der Betrag in GE, den die Konsumenten insgesamt bereit zu zahlen gewesen wären, wenn jeder den für ihn höchsten akzeptablen Preis gezahlt hätte.**

$$K_R(x) \quad = \quad \int_0^{x_0} p_N(x)\,dx \quad - \quad x_0 \cdot p_N(x_0)$$

Produzentenrente: **Diejenigen Anbieter, die zu einem geringeren Preis verkauft hätten, erhalten dadurch einen zusätzlichen Gewinn, dessen Summe als Produzentenrente bezeichnet wird.**

$$P_R(x) \quad = \quad x_0 \cdot p_A(x_0) \quad - \quad \int_0^{x_0} p_A(x)\,dx$$

5.)

Die Firma GPM stellt mobile Navigationssysteme für die Autoindustrie her. Obwohl die Absatzzahlen schwanken, halt das Unternehmen an einem Preis (in €) für das Modell NavTag II fest, der sich aus dem vom Controlling ermittelten Angebots- und Nachfragefunktionen ergibt.

Nachfragefunktion: $p_N(x) = (-2{,}7x + 242) \cdot e^{0{,}01x}$

Angebotsfunktion: $p_A(x) = (0{,}5x + 50) \cdot e^{0{,}01x}$

a) Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht.

b) Die Betriebsleitung der GPM entschließt sich, den Gewinneinbußen durch den Absatzrückgang entgegenzuwirken. Hierfür benötigt die Geschäftsführung Informationen über die potenziellen Reserven der Käufer. Berechnen Sie daher die Konsumentenrente.

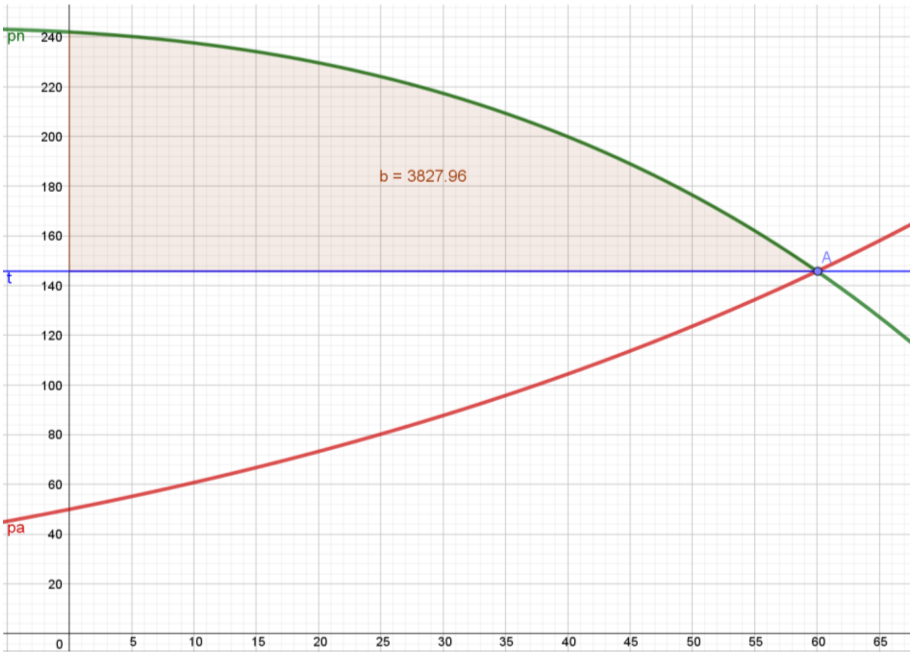
Lösung:

$$p_N(x) = (-2{,}7x+242) \cdot e^{0{,}01x} \quad und \quad p_A(x) = (0{,}5x+50) \cdot e^{0{,}01x}$$

$$\rightarrow \quad p_N(x) = p_A(x) \quad \rightarrow \quad (-2{,}7x+242) \cdot e^{0{,}01x} = (0{,}5x+50) \cdot e^{0{,}01x}$$

$$\rightarrow \quad (0{,}5x+50) \cdot e^{0{,}01x} - (-2{,}7x+242) \cdot e^{0{,}01x} = 0 \quad \rightarrow \quad (0{,}5x+50+2{,}7x-242) \cdot e^{0{,}01x} = 0$$

$$\xrightarrow{e^{0{,}01x} \neq 0} \quad 3{,}2x - 192 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 60 \quad \rightarrow \quad p_A(60) = 53 \cdot e^{0{,}06} \approx 145{,}77$$



Stammfunktion ermitteln durch partielle Integration: $p_N(x) \quad = \quad (-2,7x+242)\cdot e^{0,01x}$

NR: Partielle Integration

$f = -2,7x+242 \qquad g = 100\cdot e^{0,01x}$

$f' = -2,7 \qquad\qquad g' = e^{0,01x}$

$$Ansatz: \int(-2,7x+242)\cdot e^{0,01x}dx \quad = \quad (-2,7x+242)\cdot 100\cdot e^{0,01x} - \int\left[(-2,7)\cdot 100\cdot e^{0,01x}\right]dx$$

$$\rightarrow \quad \int(-2,7x+242)\cdot e^{0,01x}dx \quad = \quad (-2,7x+242)\cdot 100\cdot e^{0,01x} + 270\int\left[e^{0,01x}\right]dx$$

$$\rightarrow \quad \int(-2,7x+242)\cdot e^{0,01x}dx \quad = \quad (-2,7x+242)\cdot 100\cdot e^{0,01x} + 270\cdot 100\cdot e^{0,01x}$$

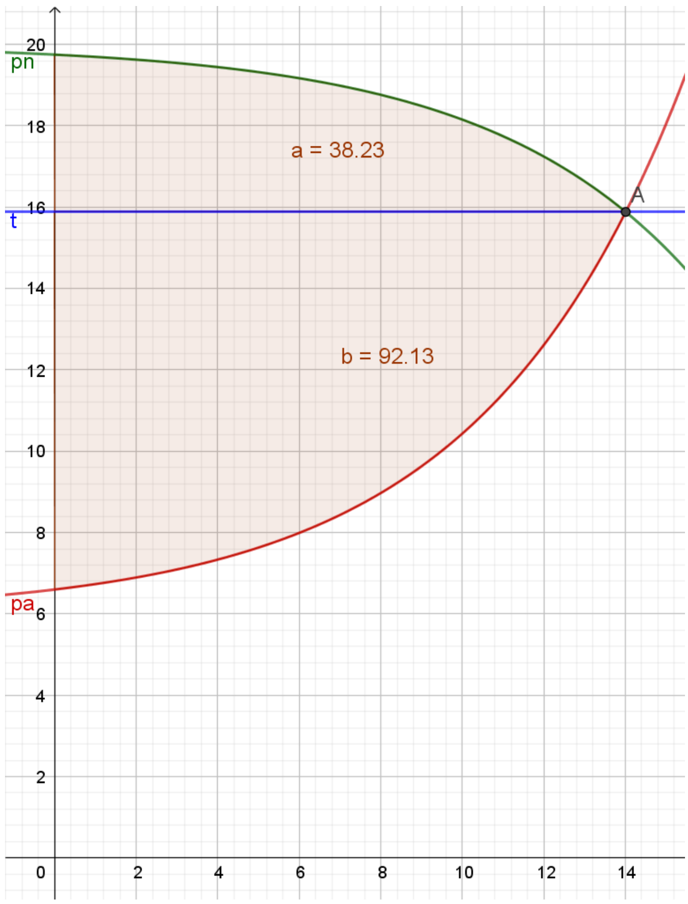
$$\rightarrow \quad \int(-2,7x+242)\cdot e^{0,01x}dx \quad = \quad (-2,7x+512)\cdot 100\cdot e^{0,01x}$$

6.)

Die Situation eines Monopolisten verändert sich als weitere Konkurrenten auf dem Markt anbieten. Die entsprechenden Nachfrage- und Angebotsfunktionen lauten:
$p_A(x) = 0,6e^{0,2x} + 6$ und $p_N(x) = -0,25e^{0,2x} + 20$.

Ermitteln Sie die Konsumentenrente und Produzentenrente und erklären Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Lösung:



Marktgleichgewicht:

$GGM = 14,007 \quad und \quad GGP = 15,89$

Stammfunktionen:

$$P_A(x) \quad = \quad 3e^{0,2x} + 6x$$

$$P_N(x) \quad = \quad -\frac{5}{4}e^{0,2x} + 20x$$