# Übungsblatt: Ökonomische Anwendung (Diff.-Rg.)

Mathematik
Jürgen Meisel

## Ökonomische Grundbegriffe:

**Betriebsoptimum (BO):** Das BO ist die Ausbringungsmenge, bei deren Produktion die geringsten Durchschnittskosten entstehen.

**Langfristige Preisuntergrenze (LPU):**
Die LPU ist hier der Preis, der den minimalen Durchschnittskosten entspricht.

**Betriebsminimum (BM):** Das BM ist die Ausbringungsmenge, bei deren Produktion die geringsten durchschnittlichen variablen Kosten entstehen.

**Kurzfristige Preisuntergrenze (KPU):** Die KPU ist hier der Preis, der den minimalen durchschnittlichen variablen Kosten entspricht.

**Cournot-Punkt (CP):** Unter dem CP versteht man den Punkt auf dem Graphen der *Preis-Absatz-Funktion (PAF)* eines Monopolisten, der an derselben Stelle liegt, wie der Schnittpunkt zwischen Grenzkosten- und Grenzerlösfunktion. Dies dokumentiert die gewinnmaximale Menge und der ihr zugehörige Preis.

**Gewinnschwelle und Gewinngrenze:** Der Gewinn eines Betriebes errechnet sich aus der Differenz des erzielten Erlöses und der entstandenen Kosten zur gleichen Menge. Bei Aufnahme der Produktion sind die Kosten aufgrund bestehender Fixkosten zunächst höher als die Erlöse, der Betrieb befindet sich in der Verlustzone. Bei einer bestimmten Produktionsmenge geht der Betrieb von der Verlust- in die Gewinnzone über; diese Stelle wird als Gewinnschwelle bezeichnet (d.h. Kosten = Erlöse).

Bei ertragsgesetzlichem Kostenverlauf gibt es im ersten Quadranten einen zweiten Schnittpunkt zwischen Kosten- und Erlösfunktion, bei dem ein Übergang von der Gewinn- in die zweite Verlustzone erfolgt. Diese Stelle wird als Gewinngrenze bezeichnet.

**Sättigungsgrenze:** Unter der Sättigungsmenge versteht man die Menge, bei der auf dem Markt selbst zum Preis von 0,00 € keine weiteren Produkte mehr absetzen kann, da der Markt gesättigt ist.

# Übungsaufgaben:

### Aufgabe 1:

Bei der Produktion eines Gutes fallen Kosten $K(x)$ in Abhängigkeit von der produzierten Menge (Ausbringungsmenge) x an. Die Kosten werden durch $K(x) = 2x^2 + 80x + 800$ beschrieben. Der Erlös (Umsatz) ist durch $E(x) = 280x - 2x^2$ gegeben. Maximal können 140 ME des betreffenden Gutes produziert und abgesetzt werden.

a) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion.
b) Bestimmen Sie die Funktion der variablen Gesamtkosten.
c) Bestimmen Sie die Funktion der fixen Gesamtkosten.
d) Bestimmen Sie die Funktion der Stückkosten (Durchschnittskosten).
e) Bestimmen Sie die Funktion der variablen Stückkosten.
f) Bestimmen Sie die Funktion der Grenzkosten.
g) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion in Abhängigkeit von der Absatzmenge.
h) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion in Abhängigkeit vom Absatzpreis.

### Lösung:

a) Gewinnfunktion:
$G(x) = -4x^2 + 200x - 800 \qquad x \in [0;\, 140]$

b) Funktion der variablen Gesamtkosten:
$K_v(x) = 2x^2 + 80x \qquad x \in [0;\, 140]$

c) Funktion der fixen Gesamtkosten:
$K_f(x) = 800 \qquad x \in [0;\, 140]$

d) Funktion der Stückkosten (Durchschnittskosten):
$k(x) = 2x + 80 + \frac{800}{x} \qquad x \in ]0;\, 140]$

e) Funktion der variablen Stückkosten:
$k_v(x) = 2x + 80 \qquad x \in ]0;\, 140]$

f) Funktion der Grenzkosten:
$K'(x) = 4x + 80 \qquad x \in [0;\, 140]$

g) Preis-Absatz-Funktion in Abhängigkeit von der Absatzmenge:
$p(x) = 280 - 2x \qquad x \in [0;\, 140]$

h) Preis-Absatz-Funktion in Abhängigkeit vom Absatzpreis:
$x(p) = 140 - \frac{1}{2}p \qquad p \in [0;\, 280]$

### Aufgabe 2:

Betrachten Sie ein Ein-Produkt-Unternehmen bei vollkommener Konkurrenz mit der Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 18x^2 + 60x + 300$. Mit x ist dabei die Absatzmenge (in ME) und mit K die Kosten (in GE) für die Herstellung des betreffenden Produkts bezeichnet. Der Absatzpreis des Produkts beläuft sich auf 27 GE / ME. Bestimmen Sie die gewinnmaximierende Absatzmenge des Unternehmens.

### Lösung:

Zunächst stellt man die Gewinnfunktion als Differenz von Erlösfunktion und Kostenfunktion auf. Man erhält $G(x) = E(x) - K(x) = 27x - (x^3 - 18x^2 + 60x + 300) = -x^3 + 18x^2 - 33x - 300$.

Darüber hinaus gilt $G'(x) = -3x^2 + 36x - 33$ und $G''(x) = -6x + 36$.

Setzt man $G'(x) = 0$, so erhält man zwei Lösungen, die in $G''(x)$ eingesetzt werden, um zu prüfen, ob ein Maximum oder Minimum bei den betreffenden Absatzmengen vorliegt.

Eine derartige Prüfung ergibt, dass die gewinnmaximierende Absatzmenge $x_1 = 11$ ME beträgt und an der Stelle $x_2 = 1$ ME ein Gewinnminimum vorliegt.

Alternativ kann man auch den Ansatz "Preis = Grenzkosten" wählen, um die gewinnmaximierende Absatzmenge des Ein-Produkt-Unternehmens zu bestimmen.

Ableiten von $K(x) = x^3 - 18x^2 + 60x + 300$ ergibt $K'(x) = 3x^2 - 36x + 60$.

Setzt man $p = K'(x)$, so erhält man wiederum zwei Lösungen. Jedoch nur eine Lösung, $x_1 = 11$ ME, beschreibt die gewinnmaximierende Absatzmenge. Die Lösung $x_2 = 1$ ME beschreibt hingegen die gewinnminimierende Absatzmenge des Ein-Produkt-Unternehmens.

**Aufgabe 3:**

Betrachten Sie ein Ein-Produkt-Unternehmen mit einer Monopolstellung auf dem relevanten Markt, der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = 14 - 0{,}25x$ und der Kostenfunktion $K(x) = 95 + 2x$. Mit x ist die abgesetzte und hergestellte Menge (in ME) und mit p der Absatzpreis (in GE pro ME) des Produkts bezeichnet. Zudem bezeichnet K die Kosten (in GE) für die Herstellung des betreffenden Produkts.

a) Bestimmen Sie die Gewinnschwellen des Unternehmens.
b) Bestimmen Sie die gewinnmaximierende Absatzmenge des Unternehmens. Bestimmen Sie den Absatzpreis und den Gewinn des Unternehmens im Gewinnmaximum.
c) Bestimmen Sie die erlösmaximierende Absatzmenge des Unternehmens. Bestimmen Sie den Absatzpreis und den Gewinn des Unternehmens im Erlösmaximum.

**Lösung:**

a) Der Gewinn ist grundsätzlich definiert als Differenz zwischen Erlös und Kosten. Der Erlös ist grundsätzlich definiert als Produkt von Absatzpreis und Absatzmenge. Es gilt:

$$G(x) = E(x) - K(x) = p(x) \cdot x - K(x)$$

Mit $p(x) = 14 - 0{,}25x$ und $K(x) = 95 + 2x$ erhält man:

$$G(x) = (14 - 0{,}25x) \cdot x - (95 + 2x) = 14x - 0{,}25x^2 - 95 - 2x = -0{,}25x^2 + 12x - 95$$

Setzt man $G(x) = 0$, so erhält man:

$$-0{,}25x^2 + 12x - 95 = 0$$

$$x^2 - 48x + 380 = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{-48}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-48}{2}\right)^2 - 380} = 24 \pm \sqrt{576 - 380} = 24 \pm \sqrt{196} = 24 \pm 14$$

Die Gewinnschwellen betragen demnach $x_1 = 10$ ME und $x_2 = 38$ ME.

b) Ableiten der Gewinnfunktion ergibt:

$$G'(x) = -0{,}5x + 12$$

Setzt man $G'(x) = 0$, so erhält man:

$$-0{,}5x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 24$$

Bei der Lösung $x = 24$ ME handelt es sich um ein Gewinnmaximum, weil die Gewinnfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist. Alternativ kann man zeigen, dass $G''(x) = -0{,}5 < 0$ gilt.

Einsetzten in die Preis-Absatz-Funktion und in die Gewinnfunktion ergibt:

$$p = p(24) = 14 - 0{,}25 \cdot 24 = 14 - 6 = 8$$

$$G = G(24) = p(24) \cdot 24 - K(24) = 8 \cdot 24 - (95 + 2 \cdot 24) = 192 - 143 = 49$$

Die gewinnmaximierende Absatzmenge beträgt $x = 24$ ME. Der Absatzpreis im Gewinnmaximum beträgt $p = 8$ GE/ME. Der Gewinn im Gewinnmaximum beträgt $G = 49$ GE.

c) Der Erlös ist grundsätzlich definiert als Produkt von Absatzpreis und Absatzmenge.

Mit $p(x) = 14 - 0{,}25x$ erhält man:

$$E(x) = (14 - 0{,}25x) \cdot x = 14x - 0{,}25x^2$$

Ableiten der Erlösfunktion ergibt:

$$E'(x) = -0{,}5x + 14$$

Setzt man $E'(x) = 0$, so erhält man:

$$-0{,}5x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = 28$$

Bei der Lösung $x = 28$ ME handelt es sich um ein Erlösmaximum, weil die Erlösfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist. Alternativ kann man zeigen, dass $E''(x) = -0{,}5 < 0$ gilt.

Einsetzten in die Preis-Absatz-Funktion und in die Gewinnfunktion ergibt:

$$p = p(28) = 14 - 0{,}25 \cdot 28 = 14 - 7 = 7$$

$$G = G(28) = p(28) \cdot 28 - K(28) = 7 \cdot 28 - (95 + 2 \cdot 28) = 196 - 151 = 45$$

Die erlösmaximierende Absatzmenge beträgt $x = 28$ ME. Der Absatzpreis im Erlösmaximum beträgt $p = 7$ GE/ME. Der Gewinn im Erlösmaximum beträgt $G = 45$ GE.

**Aufgabe 4:**

Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}8x^3 - 36x^2 + 48x$ eines Unternehmens bei der Produktion eines Gutes, wobei mit x die produzierte Menge (in ME) bezeichnet wird.

a) Bestimmen Sie die Funktion der variablen Gesamtkosten.
b) Bestimmen Sie die Funktion der Stückkosten (Durchschnittskosten).
c) Bestimmen Sie die Funktion der variablen Stückkosten.
d) Bestimmen Sie die Funktion der Grenzkosten.
e) Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der die Grenzkosten minimal sind.
f) Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der die Durchschnittskosten minimal sind.
g) Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der sich die Durchschnittskostenkurve und die Grenzkostenkurve schneiden.

**Lösung:**

a) Variable Gesamtkosten: $K_v(x) = 0{,}8x^3 - 36x^2 + 48x$

b) Stückkosten (Durchschnittskosten): $k(x) = 0{,}8x^2 - 36x + 48$

c) Variable Stückkosten: $k_v(x) = 0{,}8x^2 - 36x + 48$

d) Grenzkosten: $K'(x) = 2{,}4x^2 - 72x + 48$

e) Setze $K''(x) = 4{,}8x - 72 = 0$. Lösen der Gleichung ergibt die Produktionsmenge $x = 15$ ME.
Hier liegt ein Minimum vor, denn es gilt: $K'''(x) = 4{,}8 > 0$.

f) Setze $k'(x) = 1{,}6x - 36 = 0$. Lösen der Gleichung ergibt die Produktionsmenge $x = 22{,}5$ ME.
Hier liegt ein Minimum vor, denn es gilt: $k''(x) = 1{,}6 > 0$.

g) Setze $0{,}8x^2 - 36x + 48 = 2{,}4x^2 - 72x + 48$. Lösen der Gleichung ergibt $1{,}6x^2 - 36x = 0$ und schließlich die Produktionsmengen $x_1 = 0$ ME und $x_2 = 22{,}5$ ME.

Bemerkung:

Die Grenzkostenkurve schneidet die Durchschnittskostenkurve immer im Minimum der Durchschnittskostenkurve.

**Aufgabe 5:**

Betrachten Sie ein Ein-Produkt-Unternehmen mit einer Monopolstellung auf dem relevanten Markt, der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = 32 - 2x$ und der Kostenfunktion $K(x) = 40 + 8x$. Mit x ist die abgesetzte und hergestellte Menge (in ME) und mit p der Absatzpreis (in GE pro ME) des Produkts bezeichnet. Zudem bezeichnet K die Kosten (in GE) für die Herstellung des betreffenden Produkts.

a) Bestimmen Sie die Gewinnschwellen des Unternehmens.
b) Bestimmen Sie die gewinnmaximierende Absatzmenge des Unternehmens. Bestimmen Sie den Absatzpreis und den Gewinn des Unternehmens im Gewinnmaximum.
c) Bestimmen Sie die erlösmaximierende Absatzmenge des Unternehmens. Bestimmen Sie den Absatzpreis und den Gewinn des Unternehmens im Erlösmaximum.

**Lösung:**

a) Es gilt: $G(x) = E(x) - K(x) = p(x) \cdot x - K(x)$

Mit $p(x) = 32 - 2x$ und $K(x) = 40 + 8x$ erhält man:

$$G(x) = (32 - 2x) \cdot x - (40 + 8x) = 32x - 2x^2 - 40 - 8x = -2x^2 + 24x - 40$$

Setzt man $G(x) = 0$, so erhält man:

$$-2x^2 + 24x - 40 = 0$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{-12}{2} \pm \sqrt{(\frac{-12}{2})^2 - 20} = 6 \pm \sqrt{36 - 20} = 6 \pm \sqrt{16} = 6 \pm 4$$

Die Gewinnschwellen betragen demnach $x_1 = 2$ ME und $x_2 = 10$ ME.

b) Ableiten der Gewinnfunktion ergibt: $G'(x) = -4x + 24$

Setzt man $G'(x) = 0$, so erhält man: $-4x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (Maximum, weil $G''(x) = -4 < 0$)

Einsetzten in die Preis-Absatz-Funktion und in die Gewinnfunktion ergibt:

$$p = p(6) = 32 - 2 \cdot 6 = 32 - 12 = 20$$

$$G = G(6) = p(6) \cdot 6 - K(6) = 20 \cdot 6 - (40 + 8 \cdot 6) = 120 - 88 = 32$$

c) Mit $p(x) = 32 - 2x$ erhält man: $E(x) = (32 - 2x) \cdot x = 32x - 2x^2$

Ableiten der Erlösfunktion ergibt: $E'(x) = -4x + 32$

Setzt man $E'(x) = 0$, so erhält man: $-4x + 32 = 0 \Leftrightarrow x = 8$ (Maximum, weil $E''(x) = -4 < 0$)

Einsetzten in die Preis-Absatz-Funktion und in die Gewinnfunktion ergibt:

$$p = p(8) = 32 - 2 \cdot 8 = 32 - 16 = 16$$

$$G = G(8) = p(8) \cdot 8 - K(8) = 16 \cdot 8 - (40 + 8 \cdot 8) = 128 - 104 = 24$$

**Aufgabe 6:**

Betrachten Sie ein Ein-Produkt-Unternehmen mit einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion $f(r) = 0{,}6r^2 - 0{,}05r^3$, wobei mit r die eingesetzte Menge (Input) des Produktionsfaktors (in ME) und mit f(r) die produzierte Menge (Output) des Produkts (in ME) bezeichnet wird.

a) Bestimmen Sie die Faktoreinsatzmenge, die zu maximalem Ertrag (Output) führt.
b) Bestimmen Sie die Faktoreinsatzmenge, die zu maximalem Grenzertrag führt.
c) Bestimmen Sie die Faktoreinsatzmenge, die zu maximalem Durchschnittsertrag führt.
d) Bestimmen Sie die Faktoreinsatzmenge, bei der sich die Durchschnittsertragkurve und die Grenzertragskurve schneiden.

**Lösung:**

a) Produktionsfunktion und Ableitungen:

$f(r) = 0{,}6r^2 - 0{,}05r^3$

$f'(r) = 1{,}2r - 0{,}15r^2$

$f''(r) = 1{,}2 - 0{,}3r$

$f'''(r) = -0{,}3$

Setzt man $f'(r) = 0$, so erhält man:

$1{,}2r - 0{,}15r^2 = 0$

$r \cdot (1{,}2 - 0{,}15r) = 0$

$r_1 = 0$

$1{,}2 - 0{,}15r = 0$

$1{,}2 = 0{,}15r$

$r_2 = 8$

Überprüfung der beiden Lösungen auf ihre Extremwerteigenschaften:

$f''(0) = 1{,}2 - 0{,}3 \cdot 0 = 1{,}2 > 0$

$f''(8) = 1{,}2 - 0{,}3 \cdot 8 = -1{,}2 < 0$

Die Produktionsfunktion besitzt ein Minimum bei der Faktoreinsatzmenge $r_1 = 0$ ME und ein Maximum bei der Faktoreinsatzmenge $r_2 = 8$ ME.

b) Setze $f''(r) = 1{,}2 - 0{,}3r = 0$. Lösen der Gleichung ergibt die Faktoreinsatzmenge $r = 4$ ME. Hierbei handelt es sich um einen maximalen Grenzertrag, denn es gilt: $f'''(r) = -0{,}3 < 0$.

c) Sei $g(r) = \frac{f(r)}{r}$ die Funktion des Durchschnittsertrages. Dann gilt:

$$g(r) = \frac{f(r)}{r} = \frac{0{,}6r^2 - 0{,}05r^3}{r} = 0{,}6r - 0{,}05r^2$$

Leitet man die Funktion des Durchschnittsertrages nach r ab und setzt dies null, so erhält man: $g'(r) = 0{,}6 - 0{,}1r = 0$. Lösen der Gleichung ergibt die Faktoreinsatzmenge $r = 6$ ME. Hierbei handelt es sich um einen maximalen Durchschnittsertrag, denn es gilt: $g''(r) = -0{,}1 < 0$.

d) Die Funktion des Durchschnittsertrages (Durchschnittsertragskurve) und die Funktion des Grenzertrages (Grenzertragskurve) werden gleichgesetzt, so dass man erhält:

$0{,}6r - 0{,}05r^2 = 1{,}2r - 0{,}15r^2$

$0{,}1r^2 - 0{,}6r = 0$

$r \cdot (0{,}1r - 0{,}6) = 0$

$r_1 = 0$; $r_2 = 6$

Bemerkung:

Die Grenzertragskurve schneidet die Durchschnittsertragskurve immer im Maximum der Durchschnittsertragskurve.

**Aufgabe 7:**

Betrachten Sie ein Ein-Produkt-Unternehmen mit einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion $f(r) = -0{,}4r^3 + 18r^2 - 34{,}8r$, wobei mit r die eingesetzte Menge (Input) des Produktionsfaktors (in ME) und mit f(r) die produzierte Menge (Output) des Produkts (in ME) bezeichnet wird.

a) Bestimmen Sie die Faktoreinsatzmenge, die zu maximalem Ertrag (Output) führt.
b) Bestimmen Sie die Faktoreinsatzmenge, die zu maximalem Grenzertrag führt.
c) Bestimmen Sie die Faktoreinsatzmenge, die zu maximalem Durchschnittsertrag führt.
d) Bestimmen Sie die Faktoreinsatzmenge, bei der sich die Durchschnittsertragkurve und die Grenzertragskurve schneiden.

**Lösung:**

a)

| | | |
|---|---|---|
| $f(r) = -0{,}4r^3 + 18r^2 - 34{,}8r$ | $f'(r) = 0$ | $f''(1) = -2{,}4 \cdot 1 + 36 = 33{,}6 > 0$ |
| $f'(r) = -1{,}2r^2 + 36r - 34{,}8$ | $-1{,}2r^2 + 36r - 34{,}8 = 0$ | $f''(29) = -2{,}4 \cdot 29 + 36 = -33{,}6 < 0$ |
| $f''(r) = -2{,}4r + 36$ | $r^2 - 30r + 29 = 0$ | Minimum bei $r_1 = 1$ |
| $f'''(r) = -2{,}4$ | $r_1 = 1$; $r_2 = 29$ | Maximum bei $r_2 = 29$ |

b) Setze $f''(r) = -2{,}4r + 36 = 0$. Lösen der Gleichung ergibt die Faktoreinsatzmenge $r = 15$ ME. Hierbei handelt es sich um einen maximalen Grenzertrag, denn es gilt: $f'''(r) = -2{,}4 < 0$.

c) Sei $g(r) = \frac{f(r)}{r}$ die Funktion des Durchschnittsertrages. Dann gilt:

$$g(r) = \frac{f(r)}{r} = \frac{-0{,}4r^3 + 18r^2 - 34{,}8r}{r} = -0{,}4r^2 + 18r - 34{,}8$$

Leitet man die Funktion des Durchschnittsertrages nach r ab und setzt dies null, so erhält man: $g'(r) = -0{,}8r + 18 = 0$. Lösen der Gleichung ergibt die Faktoreinsatzmenge $r = 22{,}5$ ME. Hierbei handelt es sich um einen maximalen Durchschnittsertrag, denn es gilt: $g''(r) = -0{,}8 < 0$.

d) Die Funktion des Durchschnittsertrages (Durchschnittsertragskurve) und die Funktion des Grenzertrages (Grenzertragskurve) werden gleichgesetzt, so dass man erhält:

$$-0{,}4r^2 + 18r - 34{,}8 = -1{,}2r^2 + 36r - 34{,}8$$

$$0{,}8r^2 - 18r = 0$$

$$r \cdot (0{,}8r - 18) = 0$$

$$r_1 = 0;\ r_2 = 22{,}5$$

Bemerkung:

Die Grenzertragskurve schneidet die Durchschnittsertragskurve immer im Maximum der Durchschnittsertragskurve.