Übung: Exponentielle Wachstums- und Abnahmeprozesse

Exponentielles Wachstum

1.) Ein Kapital von 1.000,00 € wird mit 8% Zinsen angelegt.
   a) In welcher Zeit verdoppelt sich das Kapital?
   b) Zeigen Sie, dass die Verdopplungszeit nicht davon abhängt, wie groß das Anfangskapital ist!

2.) Eine Bakterienkultur besteht zu Anfang aus 1.000 Bakterien.
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich jede Stunde.
   a) Stellen Sie die Anzahl der Bakterien nach **t** Stunden als Funktion der Zeit dar.
   b) Wie viele Bakterien sind nach 2,5 Stunden vorhanden?
   c) Wann wird sich die Anzahl der Bakterien verzehnfacht haben?
   d) Das Wachstum der Bakterien lässt sich durch die Formel

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

   beschreiben (N_0 = Anfangswert). Berechnen Sie die Konstante λ!

3.) Die Bevölkerung eines Landes wächst pro Jahr um 1,5%.
Derzeit beträgt sie 12 Millionen.
   a) Wie groß wird die Bevölkerung in 10 Jahren sein?
   b) Wann wird das Land 15 Millionen Einwohner haben?
   c) Der Bevölkerungszuwachs lässt sich durch die Formel

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

beschreiben (N_0 = Anfangswert). Berechne die Konstante λ!

4.) Angenommen, die Weltbevölkerung vermehrt sich nach der Formel

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

1960 gab es ca. 3 Mrd. Menschen, 1995 ca. 5,6 Mrd.
   a) Bestimmen Sie die Konstante λ!
   b) Wie viel Prozent beträgt das jährliche Wachstum der Weltbevölkerung?
   c) Wann wird die Erde 15 Mrd. Einwohner haben, wenn die Bevölkerung im selben Tempo weiterwächst?

5.) Vor 10 Jahren betrug der Holzbestand eines Waldes 7.000 m^3. Ohne Schlägerung ist er inzwischen auf 9.880 m^3 angewachsen. Man darf annehmen, dass das Holzwachstum ein exponentieller Vorgang ist.

a) Zeigen Sie, dass die jährliche Wachstumsrate ca. 3,5% beträgt.

b) Berechnen Sie die Zeitspanne, innerhalb der sich der Holzbestand verdoppelt bzw. verdreifacht.

c) In drei Jahren möchte man 3.000 m^3 Holz zu schlagen. Wann wird dieser Wald den heutigen Holzbestand wieder erreichen?

6.) Ein Lichtstrahl, der ins Wasser fällt, wird pro Meter Wassertiefe um 10% schwächer.

a) Stellen Sie die Lichtstärke $L(x)$ als Funktion der Wassertiefe dar (Tiefe in Metern = x, Lichtstärke an der Oberfläche = L_0).

b) Wie stark ist das Licht in 10 m Tiefe?

c) In welcher Tiefe beträgt die Lichtstärke nur mehr ein Zehntel des ursprünglichen Wertes?

7.) Der radioaktive Zerfall eines Elements lässt sich durch die Formel

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

beschreiben (N_0 = Anfangswert). Die Zeit τ, in der von einer vorhandenen Stoffmenge die Hälfte zerfällt, heißt Halbwertszeit.

Für Radium beträgt sie z.B. 1.620 Jahre.

a) Berechnen Sie die Zerfallskonstante λ!

b) Wie viel war von dem ersten Gramm Radium, das Marie Curie 1898 herstellte, nach 100 Jahren noch übrig?

c) Wann wird nur mehr 0,1 g vorhanden sein?

8.) Das Kohlenstoffisotop ^{14}C zerfällt mit einer Halbwertszeit von ca. 5.730 Jahren. Mit seiner Hilfe lässt sich das Alter von Fossilien bestimmen.

a) Berechnen Sie die Zerfallskonstante λ!

b) In einem Fossil wurde ein ^{14}C-Gehalt von 7,5% der ursprünglichen Menge gemessen. Berechnen Sie das Alter des Fossils (runde auf 1.000 Jahre).

c) Bis zu welchem Alter lässt sich die ^{14}C-Methode anwenden, wenn man noch 0,1% des ursprünglichen ^{14}C-Gehalts mit hinreichender Genauigkeit messen kann?

9.) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle:

Element	**Halbwertszeit**	**Konstante λ**	**Abnahme pro Zeiteinheit in %**	**Wann ist noch 1% übrig?**
Radium	1.620 Jahre			
Caesium 137		-0,0231 / Jahr		
Phosphor 32		-0,0485 / Tag		
Jod 131	8 Tage			
Polonium 218			20% / Minute	

10.) Eine Tierpopulation hat sich in 5 Jahren von 200 auf 250 Tiere vergrößert. Angenommen, die Vermehrung erfolgt exponentiell, d.h. nach der Formel

$$B(t) \quad = \quad a \cdot e^{\lambda t}$$

(a ist der Anfangswert).

a) Berechnen Sie die Konstante λ!
b) Wie viel Prozent beträgt die jährliche Vermehrung?
c) Wann hat sich die Population verdoppelt bzw. vervierfacht?

Ergebnisse (Exponentielle Wachstums- und Abnahmeprozesse)

1.

a) ca. 9 Jahre   b) $2K_0 = K_0 \cdot 1{,}08^t \xrightarrow[\ln]{:K_0} t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}08}$

2.

a) $B(t) = 1.000 \cdot 2^t$ b) 5657

c) nach 3,3 Stunden   d) 0,6931

3.

a) 13,9 Mill.   b) in 15 Jahren   c) 0,0149

4.

a) 0,0178   b) 1,8%   c) ca. 2.050

5.

a) $7.000 \cdot 1{,}035^{10} \approx 9.880$ b) ca. 20 Jahre bzw. ca. 32 Jahre

c) in 9,3 Jahren (6,3 Jahre nach der Schlägerung)

6.

a) $L(x) = L_0 \cdot 0{,}9^x$ b) ca. 35% des ursprünglichen Werts

c) ca. 22 m

7.

a) -0,000428/Jahr   b) 0,958 g

c) nach 5382 Jahren (im Jahr 7280)

8.

a) -0,000121/Jahr   b) ca. 21.000 Jahre

c) ca. 57.000 Jahre

9.

Radium	1620 J.	-0,000428/Jahr	0,043 %	nach 10.763 J.
Caesium 137	30 J.	-0,0231/Jahr	2,28 %	nach 199 J.
Phosphor 32	14,3 T.	-0,0485/Tag	4,73%	nach 95 T.
Jod 131	8 T.	-0,08664/Tag	8,3 %	nach 53 T.
Polonium 218	3,1 Min.	-0,2231/min	20 %	nach 20,6 Min.

10.

a) 0,0446/Jahr   b) 4,56%   c) 15,5 Jahre bzw. 31 Jahre