Übungen zur Matrizenrechnung / Lineare Algebra

Lösungsverhalten von LGS:

Übung 1:

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sind die Matrix $\mathbf{A}_t$ und der Vektor $\mathbf{b}_t$ gegeben durch

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t \\ 1 & 1 & 2t-2 \\ t & t^3 & 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_t = \begin{pmatrix} 6t-4 \\ 6t-2 \\ -12t \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von t ist das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \mathbf{b}_t$ unlösbar, mehrdeutig lösbar, eindeutig lösbar?

Bestimmen Sie den Lösungsvektor für $t = 1$.

$$Det\begin{pmatrix} 1 & t & 2t \\ 1 & 1 & 2t-2 \\ t & t^3 & 16 \end{pmatrix}$$

$$Det\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & t & 2t & 1 & t \\ 1 & 1 & 2t-2 & 1 & 1 \\ t & t^3 & 16 & t & t^3 \end{array}\right) \overset{Sarrus}{=} 16 + t^2(2t-2) + 2t^4 - 2t^2 - t^3(2t-2) - 16t$$

$$Det(A_t) = 16 + 2t^3 - 2t^2 + 2t^4 - 2t^2 - 2t^4 + 2t^3 - 16t$$

$$Det(A_t) = 4t^3 - 4t^2 - 16t + 16 = 0 \quad \rightarrow \quad t \in \{-2;1;2\}$$

Auswertung :

$$\text{eindeutige Lösung} \quad \Leftrightarrow \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1;2\}$$

Pr*obe mit* $t \in \{-2;1;2\}$

$t = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & -16 \\ 1 & 1 & -6 & -14 \\ -2 & -8 & 16 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ ii - i \\ iii + 2i \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & -16 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ iii + 4ii \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & -16 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \textit{mehrdeutig lösbar}$$

$t = 1$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 16 & -12 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ ii - i \\ iii - i \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ iii + 7ii \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} mehrdeutig\ lösbar \qquad \begin{array}{r} x + y + 2z = 2 \\ z = -1 \end{array}$$

$$x + y - 2 = 2 \quad \rightarrow \quad x = 4 - y$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - y & y & -1 \end{pmatrix} \quad mit\ y \in \mathbb{R}$$

$t = 2$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 10 \\ 2 & 8 & 16 & -24 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ ii - i \\ iii - 2i \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & -40 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ iii + 4ii \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{array}\right\} unlösbar$$

Übung 2:

Zu jedem $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind die Matrix $\mathbf{A_t}$ und der Vektor $\mathbf{b_t}$ gegeben durch

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & t^2+t-2 & 1 \\ -t & -3t+2 & t^2+2t-1 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{b_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von t ist das lineare Gleichungssystem $A_t \cdot \vec{x} = \overrightarrow{b_t}$ unlösbar, mehrdeutig lösbar bzw. eindeutig lösbar?

$$Det\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & t^2+t-2 & 1 \\ -t & -3t+2 & t^2+2t-1 \end{pmatrix} \overset{Sarrus}{=} t^3-t^2-2t$$

$$Det(A_t) = t^3-t^2-2t = 0 \xrightarrow{t\neq 0} t \in \{-1;2\}$$

$$Auswertung:$$

$$eindeutige\ Lösung \quad \Leftrightarrow \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;2\}$$

$$\text{Pr}obe\ mit\ t=2$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 7 & 4 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ ii-2i \\ iii+2i \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ iii-7ii \end{array}$$

$$\to \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right\} unlösbar$$

$$\text{Pr}obe\ mit\ t=-1$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & -2 \end{array} \begin{array}{l} \\ ii+i \\ iii-i \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & -2 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ iii+2ii \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} x=y \\ z=1+3y \end{array} \quad \to \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 1+3y \end{pmatrix} \quad mit\ y \in \mathbb{R}$$

Übung 3:

Für $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 4x_2 & + & tx_3 & = & 2 \\ & & tx_2 & + & 2x_3 & = & 3t \\ tx_1 & + & 4tx_2 & + & 4tx_3 & = & 3t-4 \end{array}$$

a) Bestimmen Sie für t = 4 die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

$$\Pr obe\ mit\ t = 4$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 4 & 4 & 2 & \\ 0 & 4 & 2 & 12 & \\ 4 & 16 & 16 & 8 & iii-4i \end{array} \quad \to \quad \left.\begin{array}{ccc|cl} 1 & 4 & 4 & 2 & i-ii \\ 0 & 4 & 2 & 12 & ii/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right\} mehrdeutig\ lösbar$$

$$\begin{array}{ccc|cll} 1 & 0 & 2 & -10 & i-ii & x=-10-2z \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 3 & ii/4 & y=3-0{,}5z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{array} \quad \to \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10-2z \\ 3-0{,}5z \\ z \end{pmatrix} \quad mit\ z \in \mathbb{R}$$

b) Für welche Werte von t hat das lineare Gleichungssystem
- ⇨ keine Lösung?
- ⇨ unendlich viele Lösungen?
- ⇨ genau eine Lösung?

$$Det\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 4 & t & 1 & 4 \\ 0 & t & 2 & 0 & t \\ t & 4t & 4t & t & 4t \end{array}\right) \overset{Sarrus}{=} 4t^2+8t+0-t^3-8t-0$$

$$Det\left(A_t\right) = 4t^2 - t^3 = 0 \xrightarrow{t\neq 0} t = 4$$

$$Auswertung:$$

$$eindeutige\ Lösung \quad \Leftrightarrow \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{0;4\}$$

Übung 4:

Gegeben ist für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Matrix

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & t-3 & t+2 \\ t & 1 & t+4 \end{pmatrix} \text{ und der Vektor } \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche t ist das Gleichungssystem $A_t \cdot \vec{x} \;=\; \vec{d}$ unlösbar, mehrdeutig lösbar, eindeutig lösbar?

$$Det\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & t-3 & t+2 & 1 & t-3 \\ t & 1 & t+4 & t & 1 \end{array}\right) \overset{Sarrus}{=} 2(t-3)(t+4)+t^2+2t+2-2t(t-3)-2(t+2)-(t+4)$$

$$Det(A_t) = 2t^2+2t-24+t^2+2t+2-2t^2+6t-2t-4-t-4$$

$$Det(A_t) = t^2+7t-30=0 \xrightarrow{t\neq 0} t=\{-10;3\}$$

Auswertung:

eindeutige Lösung $\Leftrightarrow \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-10;0;3\}$

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_3 \cdot \vec{x} \;=\; \vec{d}$

Pr*obe mit* $t=3$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \end{array} \quad ii \leftrightarrow i \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|cl} 1 & 0 & 5 & 1 & \\ 2 & 1 & 2 & 1 & ii-2i \\ 3 & 1 & 7 & 2 & iii-3i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 0 & 5 & 1 & \\ 0 & 1 & -8 & -1 & \\ 0 & 1 & -8 & -1 & iii-ii \end{array} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \textit{mehrdeutig lösbar}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 1-5z \\ y = -1+8z \\ \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5z \\ -1+8z \\ z \end{pmatrix} \quad mit\ z \in \mathbb{R}$$

c) Berechnen Sie $(\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_3^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot (\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_3)$.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad A_3^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_0 - A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_0 - A_3^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \xrightarrow{adj} \begin{pmatrix} 13 & 2 & -6 \\ -4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Trans} \begin{pmatrix} 13 & -4 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Det]{VZ} -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 13 & 4 & -3 \\ -2 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Pr}\,obe:$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 13 & 4 & -3 \\ -2 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 13 & 4 & -3 \\ -2 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 & -12 & -3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$