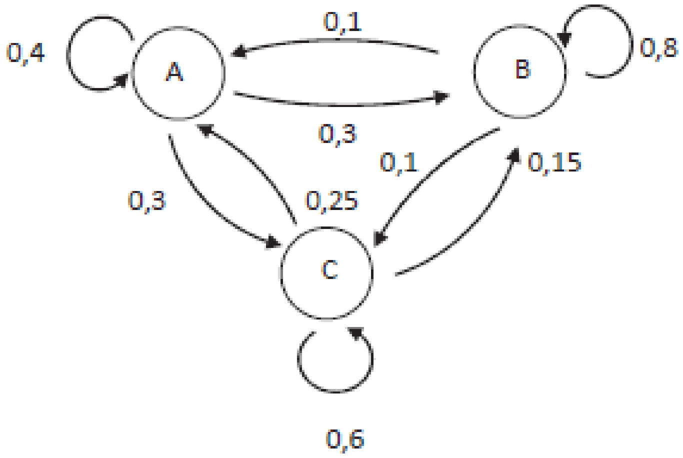
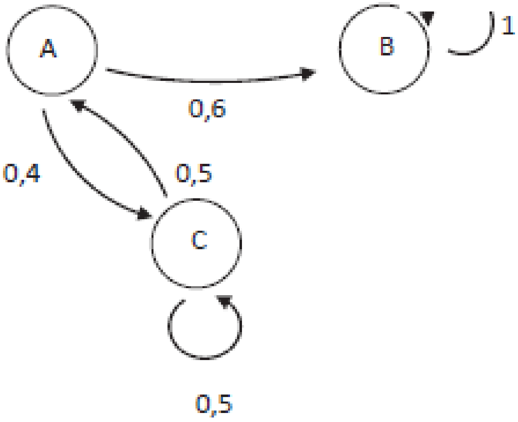
Ökonomische Anwendungen – Modellierung mit Matrizen

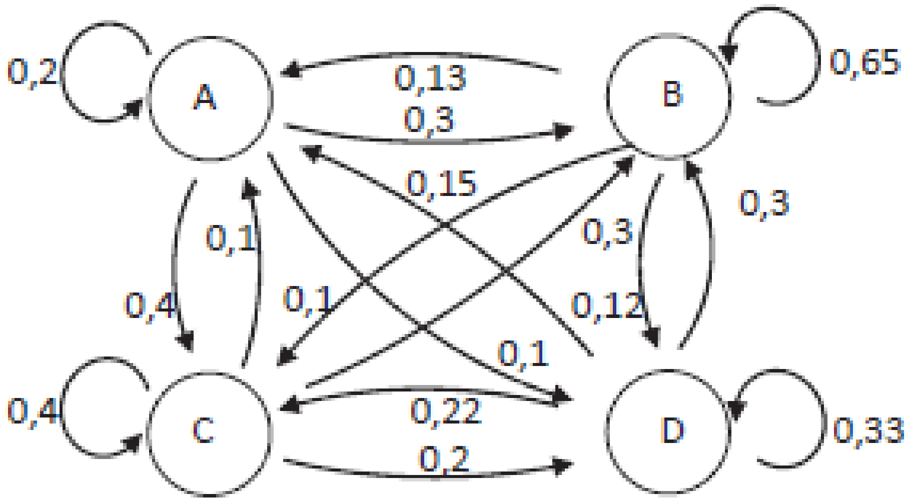
Bestimmen Sie aus dem Gozintographen jeweils die Übergangsmatrix:

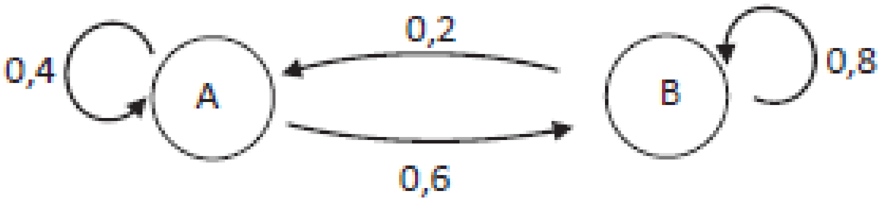
	A	B	C
A	$0,4$	$0,1$	$0,25$
B	$0,3$	$0,8$	$0,15$
C	$0,3$	$0,1$	$0,6$
Σ	1	1	1





	A	B	C
A	0	0	$0,5$
B	$0,6$	1	0
C	$0,4$	0	$0,5$
Σ	1	1	1





Übungen zu Veränderungsprozessen und statischem Gleichgewicht

(1)
Um die Lärm- und Abgasbelastung in ihrer Stadt zu verringern und gleichzeitig die Fitness ihrer Bürger zu fördern unterhält eine Stadt drei Stationen A, B und C, an denen sich die Bürger ab 7.00 Uhr Fahrräder ausleihen können. Ein an einer Station ausgeliehenes Fahrrad muss bis spätestens 22.00 Uhr an dieser oder einer der anderen Station wieder zurückgegeben werden. Die folgende Tabelle gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten ein Fahrrad von morgens bis abends die Station wechselt:

Station am Morgen	A	A	B	B	C	C
Station am Abend	B	C	A	C	A	B
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,4	0,3	0,1	0,2	0,5

An Station B befinden sich um 7.00 Uhr 20 % der Fahrräder und an Station C 10 % Fahrräder.

a) Erstellen Sie für die Situation den Gozintographen.

b) Geben Sie die Übergangsmatrix und den **Verteilungsvektor** an.

c) Berechnen Sie, wie viele Fahrräder sich am Abend an jeder der Stationen befinden werden.

d) Für den täglichen Übergang zwischen drei Radstationen A, B und C mit der Übergangsmatrix stellt man am Abend eines Tages fest, dass sich in A 22 %, in B 48 % und in C 30 % der Fahrräder befinden. **Berechnen Sie, wie die Fahrräder am Morgen des Tages verteilt waren.**

e) Gibt es ein statisches Gleichgewicht?

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ B & 0,4 & 0,6 & 0,5 \\ C & 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ \hline \Sigma & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \overrightarrow{p_{morgens}} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

Ansatz für zukünftige Werte:

$$\overrightarrow{p_{abends}} = U \cdot \overrightarrow{p_{morgens}}$$

$$\vec{p_2} = U \cdot \vec{p_1} \quad \rightarrow \quad \vec{p_2} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0,5 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,22 \\ 0,45 \\ 0,33 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p_3} = U \cdot \vec{p_2} \quad \rightarrow \quad \vec{p_3} = U \cdot U \cdot \vec{p_1} = U^2 \cdot \vec{p_1}$$

$$\vec{p_4} = U \cdot \vec{p_3} \quad \rightarrow \quad \vec{p_4} = U \cdot U^2 \cdot \vec{p_1} = U^3 \cdot \vec{p_1}$$

$$\vec{p_5} = U \cdot \vec{p_4} \quad \rightarrow \quad \vec{p_5} = U^4 \cdot \vec{p_1}$$

$$\text{allgemein:} \quad \vec{p_n} = U^{n-1} \cdot \vec{p_1}$$

Ansatz für Vergangenheitswerte:

$$\overrightarrow{p_{abends}} = U \cdot \overrightarrow{p_{morgens}}$$

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0,5 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,22 \\ 0,48 \\ 0,30 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 0,2a + 0,3b + 0,2c = 0,22 \\ 0,4a + 0,6b + 0,5c = 0,48 \\ 0,4a + 0,1b + 0,3c = 0,30 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,20 \\ 0,40 \end{pmatrix}$$

Ansatz für statisches Gleichgewicht: **gleichbleibender Verteilungsvektor**

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \xrightarrow{-\vec{x}} U \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0}$$

$$\to (U - E)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\to \left[\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0,5 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\to \begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,1 & -0,7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \to \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,15z \\ 2,4z \\ z \end{pmatrix} \quad mit\ z \in \Re$$

Ergänzung des Systems um eine Zeile: x + y + z = 1

$$\to \begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,1 & -0,7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,4 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{91} \begin{pmatrix} 23 \\ 48 \\ 20 \end{pmatrix}$$

(2)

Für eine langjährige Untersuchung über das Rauchen wird eine Gruppe von 10.000 Menschen über mehrere Jahre beobachtet. Die Gruppe gliedert sich in Nichtraucher, Gelegenheitsraucher und (tägliche) Raucher. Die Wissenschaftler, die die Untersuchung durchführen, gehen davon aus, dass im Lauf eines Jahres

· von den Nichtrauchern 80 % Nichtraucher bleiben, 12 % zu Gelegenheitsrauchern und 8 % zu täglichen Rauchern werden;

· von den Gelegenheitsrauchern 35 % zu Nichtrauchern werden, 33 % Gelegenheitsraucher bleiben und 32 % tägliche Raucher werden;

· von den täglichen Rauchern 5 % zu Nichtrauchern und 10 % zu Gelegenheitsrauchern werden und 85 % tägliche Raucher bleiben.

Zu Beginn der Untersuchung besteht die Gruppe aus 7.000 Nichtrauchern, 2.000 Gelegenheitsrauchern und 1.000 täglichen Rauchern.

a) Stellen Sie die beschriebene Situation in einem Gozintographen mit drei Zuständen dar.

b) Geben Sie die Übergangsmatrix und den Verteilungsvektor an.

c) Berechnen Sie, wie viele Nichtraucher, Gelegenheitsraucher und (tägliche) Raucher es nach einem Jahr geben wird.

d) Ermitteln Sie das statische Gleichgewicht.

$$\overrightarrow{p_2} = U \cdot \overrightarrow{p_1} \quad \to \quad \overrightarrow{p_2} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,35 & 0,05 \\ 0,12 & 0,33 & 0,1 \\ 0,08 & 0,32 & 0,85 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,635 \\ 0,16 \\ 0,205 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \xrightarrow{-\vec{x}} U \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0}$$

$$\to (U - E)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\to \begin{pmatrix} -0,2 & 0,35 & 0,05 \\ 0,12 & -0,67 & 0,1 \\ 0,08 & 0,32 & -0,15 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Ergänzung des Systems um eine Zeile: x + y + z = 1

$$\to \begin{pmatrix} -0,2 & 0,35 & 0,05 \\ 0,12 & -0,67 & 0,1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{373} \begin{pmatrix} 137 \\ 52 \\ 184 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3673 \\ 0,1394 \\ 0,4933 \end{pmatrix}$$