Ein paar Erläuterungen zur Ermittlung der Determinante einer Matrix

nach Pierre-Simon Laplace

Geboren: **23. März 1749**
in Beaumont-en-Auge

Gestorben: 5. März 1827 in Paris

Entwicklung von Determinanten

Man entwickelt die Determinante einer quadratischen Matrix nach den Elementen einer beliebigen Zeile (Spalte), indem man die Elemente der gewählten Zeile (Spalte) mit ihren zugehörigen Unterdeterminanten multipliziert und die Produkte summiert. Dabei bekommt jedes Produkt aus Element und Unterdeterminante das Vorzeichen, das sich aus der Position des Elements in folgendem Schema ergibt:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Allgemein führt dies zu folgender Darstellung:

$$\det(A) = \sum_{i,k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot A_{ik}$$

Fall 1: **Format 2 x 2**

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Fall 2: **Format 3 x 3**

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} =$$

Determinantensätze

Satz 1: Eine Determinante kann man transponieren, d.h. Zeilen und Spalten vertauschen, ohne dass sich ihr Wert ändert.

$$\boxed{\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T)}$$

Satz 2: Vertauscht man zwei Zeilen oder Spalten einer Determinante, so wechselt die Determinante das Vorzeichen.

$$\boxed{\text{Det}(\ldots, a_i, \ldots, a_k, \ldots) = -\,\text{Det}(\ldots, a_k, \ldots, a_i, \ldots)}$$

Satz 3: Wenn eine Spalte oder Zeile einer Determinante nur aus Nullen besteht, hat die Determinante den Wert Null.

$$\boxed{\text{Det}(\ldots, a_i, \ldots, 0, \ldots) = 0}$$

Satz 4: Wenn zwei Spalten oder Zeilen einer Determinante einander proportional sind ($k \in \Re$), hat die Determinante den Wert Null.

$$\boxed{\text{Det}(\ldots, a_i, \ldots, ka_i, \ldots) = 0}$$

Anmerkung: Eine Determinante nimmt dann den Wert 0 an, wenn die Zeilen oder Spalten linear abhängig sind.

Satz 5: Man multipliziert eine Determinante mit einer Zahl $k \in \Re$, indem man die Elemente einer Spalte oder Zeile mit der Zahl multipliziert.
Dadurch multipliziert sich der Wert der Determinante mit k.

$$\boxed{\text{Det}(a_1, \ldots, ka_i, \ldots, a_n) = k\,\text{Det}(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}$$

Satz 6: Man addiert zwei Determinanten, die sich nur in den Elementen einer Zeile oder Spalte unterscheiden, indem man die Elemente dieser Zeilen oder Spalten addiert und die übrigen beibehält.

Anmerkung: Natürlich gilt dieser Vorgang auch umgekehrt:

$$\boxed{\text{Det}(\ldots, a_i + b_i, \ldots) = \text{Det}(\ldots, a_i, \ldots) + \text{Det}(\ldots, b_i, \ldots)}$$

Aber: $\text{Det}(A + B) \neq \text{Det}(A) + \text{Det}(B)$

Satz 7: Addiert man zu den Elementen einer Zeile oder Spalte ein beliebiges Vielfaches der Elemente einer **anderen** (Wichtig: $i \neq j$) Zeile oder Spalte, so ändert sich der Wert der Determinante nicht.

$$\boxed{\text{Det}(\ldots, a_i + ka_j, \ldots) = \text{Det}(\ldots, a_i, \ldots)}$$

Satz 8: Der Wert einer Determinante, bei der oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, ist gleich dem Produkt der Elemente in der Hauptdigonalen.
Daraus resultiert folgender Sonderfall:

$$\boxed{\text{Det}(E) = 1}$$

Satz 9:

$$\boxed{\text{Det}(ka_1, \ldots, ka_i, \ldots, ka_n) = k^n \, \text{Det}(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}$$

Satz 10:

$$\boxed{\text{Det}(A * B) = \text{Det}(A) * \text{Det}(B)}$$

Satz 11:

$$\boxed{\text{Det}(A^{-1}) = {}^{1}/_{\text{Det}(A)}}$$

Invertierung von Matrizen

Verfahren über die adjungierte Matrix

(1) Unterdeterminanten für die jeweiligen Positionen bilden

(2) Transponieren der Matrix

(3) Vorzeichenschema entspr. der Laplace-Entwicklung anwenden

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \ldots \\ - & + & - & \ldots \\ + & - & + & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

(4) Ergebnis-Matrix mit Kehrwert der Determinante multiplizieren