Übungsblatt: Matrizen und Determinanten

Mathematik
Jürgen Meisel

1.) Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & t \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ t & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad G=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad H=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad K=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie nun folgende Ausdrücke:

a) A + 2 C b) 3A – 4F + C c) B - 3K

d) D + A e) $H + 4C^T - (A - G)^T$ f) K + 2H

Bestimmen Sie die Produkte

a) $A * C^T$ b) $C^T * A$ c) H * C d) C * H e) D * A

f) D^2 g) H * D h) F * G i) E * A j) A * E

Wo gilt die binomische Formel und wo nicht? Warum?

k) $(A * C^T + D)^2 = (A\,C^T)^2 + 2A\,C^T D + D^2$

l) $(D + E)^2 = D^2 + 2DE + E^2$

2.) Determinanten

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a & ab \\ 1 & -b \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ x & 1 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & 2a^2b^2 \\ -1 & (a-b)^2 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ o) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 34 \\ 0 & 3 & 54 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

3.) Berechnen Sie die Matrizenprodukte **AB, BA, AO, AE und EB** für

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.) Welche Matrix X ist mit der Matrix $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vertauschbar, so dass AX = XA gilt ?

6.) Gegeben sei die Matrix $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Für welche reellen Zahlen a gilt

a) $A + A^T = E$, b) $A - A^T = O$, c) $AA = A$, d) $aA + E \leq O$,

wenn E die Einheitsmatrix und O die Nullmatrix von passendem Format sind.

7.) Inversen zu Matrizen

Bilden Sie jeweils die Inverse zu folgenden Matrizen

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ t & t^2 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ t & 2 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad G=\begin{pmatrix} 1 & 3 & t \\ t & t^2 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix} 1 & 4 & t \\ t & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad K=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & t \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8.) Gegeben sei das folgende LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & t \\ 2t & 1 & 8 \\ 1 & -2 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2-1 \\ 1 \\ 2-t \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von **t** hat das LGS

(i) keine Lösungen? (ii) eine Lösung? (iii) unendlich viele Lösungen?

9.) Gegeben seien die Matrix A_t und der Vektor $\vec{b}_t$

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_t = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \Re$$

a) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen LGS $A_3 \cdot \vec{x} = \vec{b}_3$.

b) Worin unterscheiden sich homogene und inhomogene LGS?
Nennen Sie zwei Unterschiede!

c) Für welche Werte $t \in \Re$ hat das inhomogene LGS $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}_t$
keine Lösung?

d) Geben Sie eine Lösung für das zugehörige **homogene** LGS $A_1 \cdot \vec{x} = ??$ an.
Wählen Sie dabei y als freie Variable.

10.) Gegeben sind die Matrix A_k und der Vektor $\vec{b}_k$ durch

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 2k & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -k & 3k & k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ k-1 \\ k \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die Determinante von A_k.

b) Für welche Werte von k hat das LGS $A_k \cdot \vec{x} = \vec{b}_k$
(i) keine Lösung? (ii) genau eine Lösung?
(iii) unendlich viele Lösungen?

c) Bestimmen Sie die Lösung für $A_0 \cdot \vec{x} = \vec{b}_0$.