Erwartungswert, Standardabweichung und Sigma-Intervall in der Binomialverteilung

$$Erwartungswert: \quad E(X) = \mu_X = n \cdot p$$

Eigenschaft: Im Erwartungswert hat die BV immer die höchste Wahrscheinlichkeit!

Varianz: $V(X) = \sigma_X^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = \mu \cdot (1-p)$

Standardabweichung: $S(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma_X^2} = \sigma_X = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\mu \cdot (1-p)}$

Aus der Standardabweichung werden die Sigma-Intervalle ermittelt.

Beispiel: n = 50; p = 0,3

$$Erwartungswert: \quad E(X) = \mu_X = 50 \cdot 0{,}3 = 15$$

Varianz: $V(X) = \sigma_X^2 = 15 \cdot 0{,}7 = 10{,}5$

Standardabweichung: $S(X) = \sigma_X = \sqrt{10{,}5} = 3{,}24$

Sigma-Regel:

Idee:

Welche Wahrscheinlichkeit besitzt die BV, wenn vom Erwartungswert um +/-$\pm\sigma_X$ (= Sigma) abgewichen wird => Wahrscheinlichkeit für ein Sigma-Intervall um den Erwartungswert herum

Schreibweise:

Einzelwahrscheinlichkeit für den Erwartungswert:

$$B_{n;p}(X = \mu) = \binom{n}{\mu} \cdot p^k (1-p)^{n-\mu}$$

Summenwahrscheinlichkeit => W'keitsverteilung:

$$B_{n;p}(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = B_{n;p}(X = \mu - \sigma) + \ldots + B_{n;p}(X = \mu + \sigma)$$

$$B_{n;p}(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = \binom{n}{\mu - \sigma} \cdot p^{\mu - \sigma}(1-p)^{n-(\mu-\sigma)} + \ldots + \binom{n}{\mu + \sigma} \cdot p^{\mu + \sigma}(1-p)^{n-(\mu+\sigma)}$$

$$B_{n;p}(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = \sum_{k=\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

Vereinfachung:

$$X \le \mu + \sigma \xrightarrow{-\mu} X - \mu \le \sigma \quad \text{und} \quad \mu - \sigma \le X \xrightarrow{-\mu} -\sigma \le X - \mu$$

$$\Rightarrow \quad -\sigma \le X - \mu \le \sigma \quad \Rightarrow \quad |X - \mu| \le \sigma$$

$$B_{n;p}(-\sigma \le X - \mu \le \sigma) = B_{n;p}(|X - \mu| \le \sigma) = \sum_{k=\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

Sigma-Regeln:

(1) $B_{n;p}(|X - \mu| \le \sigma) \approx 66\,\%$

(2) $B_{n;p}(|X - \mu| \le 2\sigma) \approx 96\,\%$

(3) $B_{n;p}(|X - \mu| \le 3\sigma) \approx 99\,\%$

Übungen:

1 Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Standardabweichung der Binomialverteilung sowie die Wahrscheinlichkeit des σ-Intervalls. Skizzieren Sie den Graphen.

a) p = 0,5 und n = 10; 25; 50; 100 b) n = 50 und p = $\frac{1}{6}$; 0,25; 0,4; 0,8

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = \mu \cdot (1-p)$$

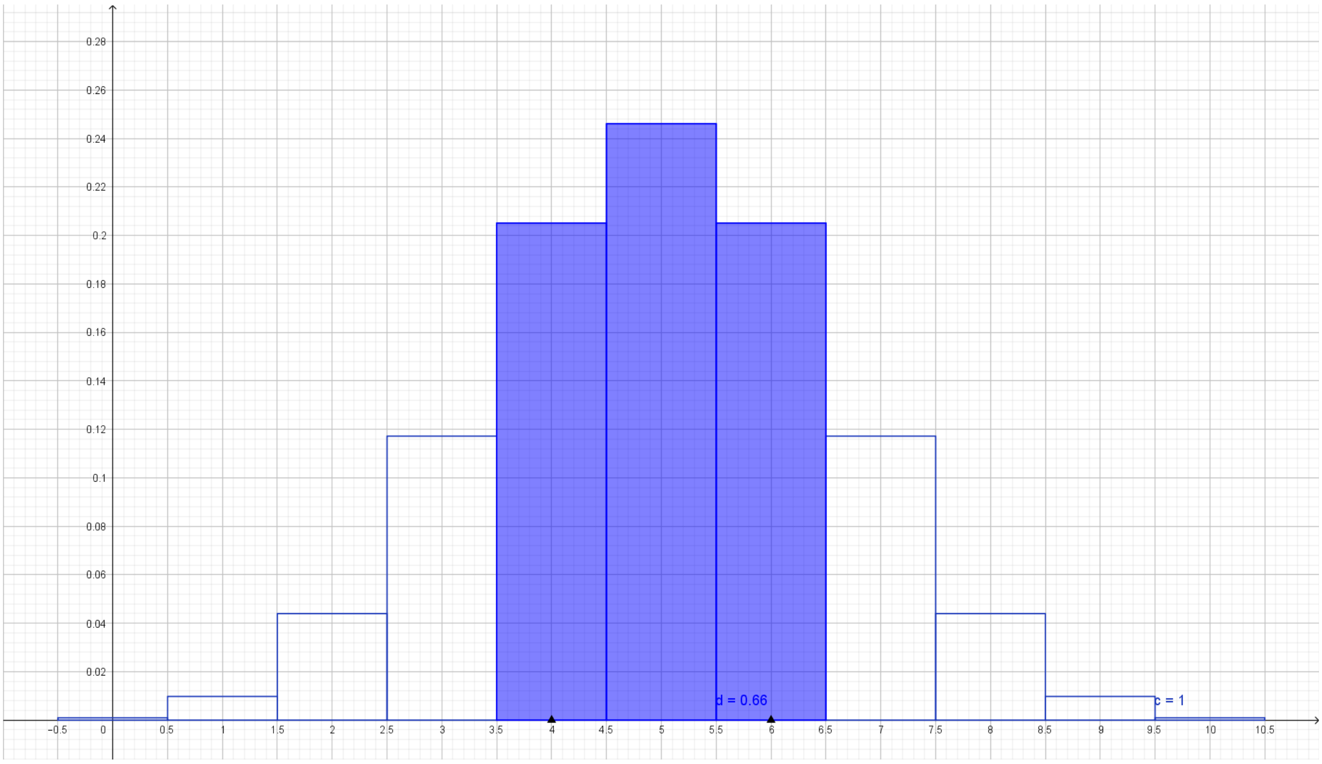
$$S(X) = \sigma_X = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\mu \cdot (1-p)}$$

$$E(X) = \mu = 10 \cdot 0{,}5 = 5$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$$

$$S(X) = \sigma_X = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}6$$

$$Sigma - Intervall: |X - 5| \leq 1{,}6 \quad \rightarrow \quad [3{,}4; 6{,}6] \approx [4;6] \, oder \, [3;7]$$



2 Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Binomialverteilung. Geben Sie den Wert mit der größten Wahrscheinlichkeit an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des 3-σ-Intervalls.

a) n = 25, p = 0,3 b) n = 15, p = 0,3 c) n = 70, p = 0,9 d) n = 100, p = 0,9

$$E(X) = \mu = 25 \cdot 0,3 = 7,5$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = 7,5 \cdot 0,7 = 5,25$$

$$S(X) = \sigma_X = \sqrt{5,25} \approx 2,29$$

$$Sigma-Intervall: |X - 7,5| \leq 3 \cdot 2,3 \approx 7 \quad \rightarrow \quad [0;14]$$

$TR:$

$$B_{25;0,3}(0 \leq X \leq 14) = \sum_{k=0}^{14} \binom{25}{k} \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{25-k} = 0,9982$$