Lösungen zu den Arbeitsaufträgen aus dem Lehrbuch:
Grundlagenformeln zur Berechnung:

$$Erwartungswert: \quad E(X) = \mu_X = n \cdot p$$

Varianz: $V(X) = \sigma_X^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = \mu \cdot (1-p)$

Standardabweichung: $S(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma_X^2} = \sigma_X = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\mu \cdot (1-p)}$

$Einzelwahrscheinlichkeit:$	$Summenwahrscheinlichkeit => W'keitsverteilung:$
$B_{n;p}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$	$B_{n;p}(k_1 \leq X \leq k_2) = \sum_{X=k_1}^{k_2} \binom{n}{X} \cdot p^X (1-p)^{n-X}$

Seite 503 – Aufgabe 3:

a) Erfolgswahrscheinlichkeit p = 0,9; k = Anzahl der keimenden Blumenzwiebeln
n = insgesamt 16 Blumenzwiebeln

b) (i) $B_{16;0,9}(X=16) = \binom{16}{16} \cdot 0,9^{16} \cdot 0,1^0 = 0,1853$

(ii) $B_{16;0,9}(X=14) = \binom{16}{14} \cdot 0,9^{14} \cdot 0,1^2 = 0,2745$

(iii) $B_{16;0,9}(X \geq 14) = \sum_{X=14}^{16} \binom{16}{X} \cdot 0,9^X \cdot 0,1^{16-X} = 0,7893$

(iv) $B_{16;0,9}(X \leq 13) = \sum_{X=0}^{13} \binom{16}{X} \cdot 0,9^X \cdot 0,1^{16-X} = 0,2108$

(v) $B_{16;0,9}(12 \leq X \leq 15) = \sum_{X=12}^{15} \binom{16}{X} \cdot 0,9^X \cdot 0,1^{16-X} = 0,7976$

Seite 504 – Aufgabe 4:

a) Erfolgswahrscheinlichkeit p = 0,75 (15 von 20); k = Anzahl der Angestellten, die in der Kantine essen
n = insgesamt 20 Angestellte

b) (i) $B_{20;0,75}(X=15) = \binom{20}{15} \cdot 0,75^{15} \cdot 0,25^5 = 0,2023$

(ii) $B_{20;0,75}(X \leq 14) = \sum_{X=0}^{14} \binom{20}{X} \cdot 0,75^X \cdot 0,25^{20-X} = 0,3828$

(iii) $B_{20;0,75}(X \geq 16) = \sum_{X=16}^{20} \binom{20}{X} \cdot 0,75^X \cdot 0,25^{20-X} = 0,4148$

(iv) $B_{20;0,75}(11 \leq X \leq 15) = \sum_{X=11}^{15} \binom{20}{X} \cdot 0,75^X \cdot 0,25^{20-X} = 0,5713$

(v)

$$B_{20;0,75}(X \leq 9) + B_{20;0,75}(X \geq 17) = 1 - B_{20;0,75}(10 \leq X \leq 16)$$

$$B_{20;0,75}(X \leq 9) + B_{20;0,75}(X \geq 17) = 1 - \sum_{X=10}^{16} \binom{20}{X} \cdot 0,75^X \cdot 0,25^{20-X} = 0,229$$

(vi) Wenn die Kantine täglich genau 16 Essen bereithält, dann besteht bei X > 16 die Wahrscheinlichkeit von $B_{20;0,75}(X \geq 17) = \sum_{X=17}^{20} \binom{20}{X} \cdot 0,75^X \cdot 0,25^{20-X} = 0,2252$, dass einer bis vier Angestellte kein Essen in der Kantine mehr bekommen.

Seite 504 – Aufgabe 5:

A: $B_{10;0,03}(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0,03^0 \cdot 0,97^{10} = 0,7374$

B: $B_{20;0,03}(X \geq 1) = 1 - B_{20;0,03}(X = 0) = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0,03^0 \cdot 0,97^{20} = 0,4562$

C: $B_{50;0,03}(X \geq 2) = 1 - B_{50;0,03}(X \leq 1) = 1 - \binom{50}{0} \cdot 0,03^0 \cdot 0,97^{50} - \binom{50}{1} \cdot 0,03^1 \cdot 0,97^{49} = 0,4447$

Fall A hat die größte Wahrscheinlichkeit.

Seite 504 – Aufgabe 9:

a) Keine BV, Wartezeitproblem – p=1/6 aber keine konkrete Anzahl für die Versuche n anzugeben.
b) BV liegt nur vor, wenn man eine genügend große Grundgesamtheit n > 500 befragt und wenn die Befragung der einzelnen Personen voneinander unabhängig ist – zudem muss die Befragung nur zwei Ausgänge zulassen.
c) n = 20 (Rosinen) => X = Anzahl der Rosinen in einem Brötchen mit p = 0,1 (jede Rosine hat die gleich hohe Wahrscheinlichkeit in einem [beliebigen] Brötchen verarbeitet zu werden.
d) Speziell auf eine Münze bezogen ist es eine BV;
Auf eine Vielzahl von Münzen bezogen allerdings nicht, da die Art der Verbeulung sicherlich nicht gleichartig ist, so dass es auf die jeweilige Münze ankäme und immer wieder verschiedene Trefferwahrscheinlichkeiten herangezogen werden müssten
e) Keine BV, sondern eine Hypergeometrische Verteilung – Ziehen ohne Zurücklegen

Seite 505 – Aufgabe 11:

A: $B_{100;0,02}(X = 4) = \binom{100}{4} \cdot 0,02^4 \cdot 0,98^{98} = 0,0902$

B: $B_{100;0,02}(X \leq 3) = \sum_{X=0}^{3} \binom{100}{X} \cdot 0,02^X \cdot 0,98^{100-X} = 0,8590$

C:

$$B_{100;0,02}(X \leq 5) = \sum_{X=0}^{5} \binom{100}{X} \cdot 0,02^X \cdot 0,98^{100-X} = 0,9845 \quad oder$$

$$B_{100;0,98}(X \geq 95) = \sum_{X=95}^{100} \binom{100}{X} \cdot 0,98^X \cdot 0,02^{100-X} = 0,9845$$

D: $P_{100;0,02} = \cdot 0,02^3 \cdot 0,98^{97} = 0,000001127 = 1,127 \cdot 10^{-6}$

Seite 505 – Aufgabe 12:

A: $$B_{10;0,2}\left(X>3\right)=1-B\left(X\le 3\right)=1-\sum_{k=0}^{3}\binom{10}{k}\cdot 0,2^k\cdot 0,8^{10-k}=0,1209$$

B: $$B_{25;0,2}\left(X>6\right)=1-B\left(X\le 6\right)=1-\sum_{k=0}^{6}\binom{25}{k}\cdot 0,2^k\cdot 0,8^{25-k}=0,22$$

C: $$B_{50;0,2}\left(X>10\right)=1-B\left(X\le 10\right)=1-\sum_{k=0}^{10}\binom{50}{k}\cdot 0,2^k\cdot 0,8^{50-k}=0,4164$$

Seite 505 – Aufgabe 14:

A: $$B_{10;0,02}\left(X\ge 1\right)=1-B\left(X=0\right)=1-\binom{10}{0}\cdot 0,02^0\cdot 0,98^{10}=0,1829$$

B:
$$B_{10;0,04}\left(X\ge 1\right)=1-B\left(X=0\right)=1-\binom{10}{0}\cdot 0,04^0\cdot 0,96^{10}=0,3352$$

$$B_{10;0,01}\left(X\ge 1\right)=1-B\left(X=0\right)=1-\binom{10}{0}\cdot 0,01^0\cdot 0,99^{10}=0,0956$$

Seite 508 – Aufgabe 6:

A: $$B_{100;\frac{1}{6}}\left(X=15\right)=\binom{100}{15}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{15}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{85}=0,1003$$

B: $$B_{100;\frac{1}{6}}\left(X>25\right)=B_{100;\frac{1}{6}}\left(X\ge 26\right)=\sum_{k=26}^{100}\binom{100}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}=0,0119$$

C: $$B_{100;\frac{1}{6}}\left(15\le X\le 25\right)=\sum_{k=15}^{25}\binom{100}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}=0,7007$$

Seite 508 – Aufgabe 7:

$$B_{20;0,05}\left(X\ge 2\right)=\sum_{k=2}^{20}\binom{20}{k}\cdot 0,05^k\cdot 0,95^{20-k}=0,2642$$

Seite 508 – Aufgabe 8:

$$B_{100;\frac{1}{3}}\left(X>33\right)=B_{100;\frac{1}{3}}\left(X\ge 34\right)=\sum_{k=34}^{100}\binom{100}{k}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}=0,4812$$

Übungen zu Sigma-Intervallen

1 Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Standardabweichung der Binomialverteilung sowie die Wahrscheinlichkeit des σ-Intervalls. Skizzieren Sie den Graphen.

a) p = 0,5 und n = 10; 25; 50; 100 b) n = 50 und $p = \frac{1}{6}$; 0,25; 0,4; 0,8

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = \mu \cdot (1-p)$$

$$S(X) = \sigma_X = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\mu \cdot (1-p)}$$

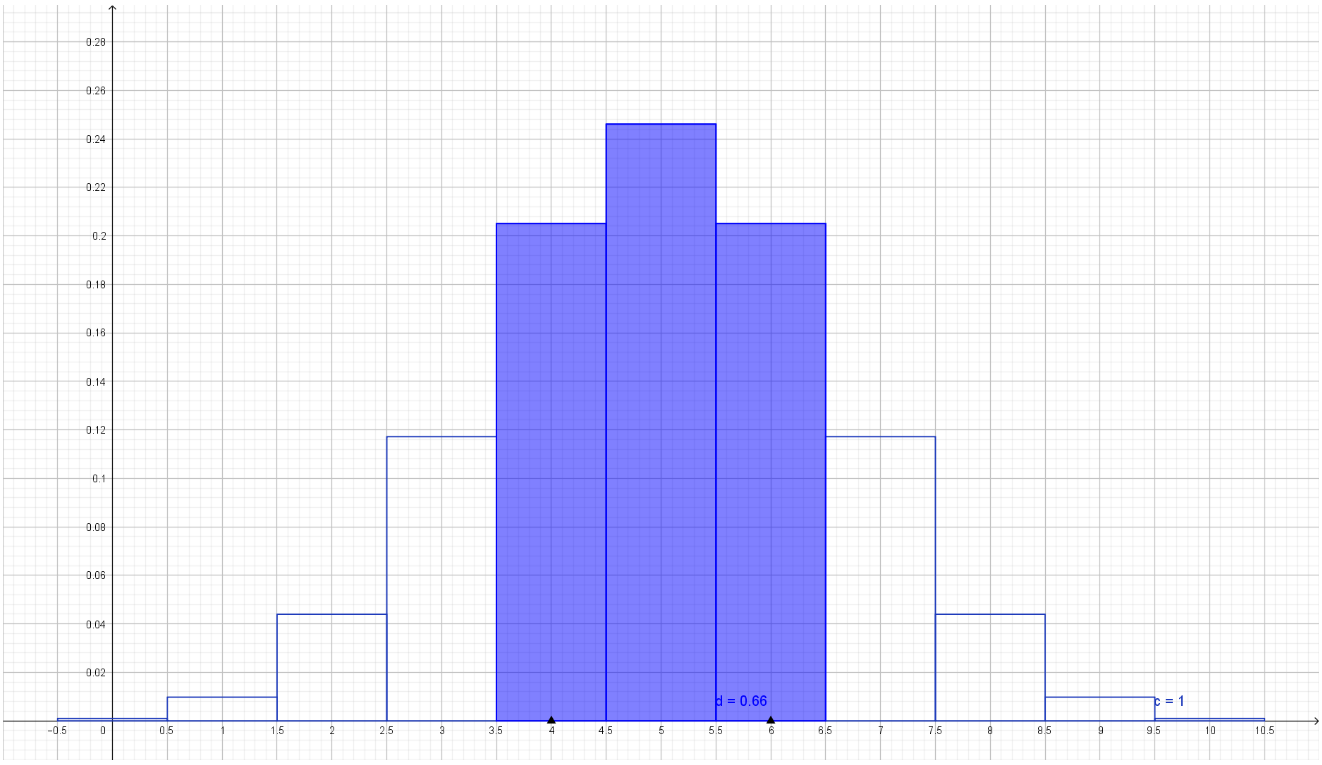
$$E(X) = \mu = 10 \cdot 0,5 = 5$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = 5 \cdot 0,5 = 2,5$$

$$S(X) = \sigma_X = \sqrt{2,5} \approx 1,6$$

$$Sigma-Intervall: |X - 5| \le 1,6 \quad \rightarrow \quad [3,4;6,6] \approx [4;6] oder [3;7]$$

8 In einer Werkskantine werden freitags ein Fischgericht und zwei weitere Menüs angeboten. Erfahrungsgemäß wählt ein Drittel der 100 Kantinenbesucher das Fischgericht.
Die Küche bereitet 33 Fischgerichte vor. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese 33 Fischgerichte nicht ausreichen?



2 Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Binomialverteilung. Geben Sie den Wert mit der größten Wahrscheinlichkeit an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des 3-σ-Intervalls.

a) n = 25, p = 0,3 b) n = 15, p = 0,3 c) n = 70, p = 0,9 d) n = 100, p = 0,9

$$E(X) = \mu = 25 \cdot 0,3 = 7,5$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = 7,5 \cdot 0,7 = 5,25$$

$$S(X) = \sigma_X = \sqrt{5,25} \approx 2,29$$

$$Sigma-Intervall: |X - 7,5| \leq 3 \cdot 2,3 \approx 7 \quad \rightarrow \quad [0;14]$$

$$TR:$$

$$B_{25;0,3}(0 \leq X \leq 14) = \sum_{k=0}^{14} \binom{25}{k} \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{25-k} = 0,9982$$