Lösungen zu den Arbeitsaufträgen aus dem Lehrbuch:

Grundlagenformeln zur Berechnung:

$$\mathit{Erwartungswert}: \quad E(X) = \mu_X = n \cdot p$$

$$\text{Varianz:} \qquad V(X) = \sigma_X^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = \mu \cdot (1-p)$$

$$\text{Standardabweichung:} \quad S(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma_X^2} = \sigma_X = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\mu \cdot (1-p)}$$

$\mathit{Einzelwahrscheinlichkeit}:$	$\mathit{Summenwahrscheinlichkeit} \Rightarrow W'\mathit{keitsverteilung}:$
$B_{n;p}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$	$B_{n;p}(k_1 \le X \le k_2) = \sum_{X=k_1}^{k_2} \binom{n}{X} \cdot p^X (1-p)^{n-X}$

Seite 510 – Aufgabe 1:

$$B_{10;0,25}(X=3) \quad = \quad \binom{10}{3} \cdot 0,253^k \cdot 0,75^7 \quad = \quad 0,25028$$

$$B_{10;0,25}(3 \le X \le 10) \quad = \quad B_{10;0,25}(X \ge 3) \quad = \quad \sum_{X=3}^{10} \binom{10}{X} \cdot 0,25^X \cdot 0,75^{n-X} \quad = \quad 0,4744$$

$$B_{10;0,25}(0 \le X \le 2) \quad = \quad B_{10;0,25}(X \le 2) \quad = \quad 1 - B_{10;0,25}(X \ge 3) \quad = \quad 1 - 0,4744 \quad = \quad 0,5256$$

$$B_{10;0,25}(3 < X \le 10) = B_{10;0,25}(X \ge 4) = B_{10;0,25}(X \ge 3) - B_{10;0,25}(X = 3) = 0,4744 - 0,25028 = 0,22412$$

Wie groß ist das zugehörige Sigma-Intervall?

$$\mathit{Erwartungswert}: \quad E(X) = \mu_X = 10 \cdot 0,25 = 2,5$$

$$\text{Varianz:} \qquad V(X) = \sigma_X^2 = 10 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 1,875$$

$$\text{Standardabweichung:} \quad S(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma_X^2} = \sigma_X = \sqrt{1,875} = 1,37$$

$$\mathit{Intervall}: \quad [\mu - \sigma / \mu + \sigma] \quad \rightarrow \quad [2,5 - 1,37 / 2,5 + 1,37] \quad \xrightarrow[\mathit{ganzzahlig}]{\mathit{diskret}} \quad [1;4]$$

Seite 510 – Aufgabe 2:

2 Aus der Prüfstatistik eines Kugelschreiberherstellers geht hervor, dass 3 % der produzierten Kugelschreiber defekt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) ist von 15 Kugelschreibern keiner defekt,

b) sind von 25 Kugelschreibern mindestens zwei defekt,

c) sind von 50 Kugelschreibern höchstens zwei defekt,

d) beträgt die Anzahl von defekten bei 100 Kugelschreibern mindestens 2 und höchstens 4?

Bitte bearbeiten:

2d und Berechnung des zweifachen Sigma-Intervalls (n = 100)

Ergebnisse:

$$B_{100;0,03}(2 \le X \le 4) \quad = \quad 0,6232$$

$$\mathit{Intervall}: \quad \mu = 3 \quad \sigma = 1,7058 \quad \xrightarrow{2\sigma} \quad 2\sigma = 3,4117 \quad \rightarrow \quad [0;6]$$

Seite 510 – Aufgabe 3:

3 Ein Feriendorf nimmt 50 Buchungen entgegen, obwohl es nur 48 Wohnungen gibt, denn in den letzten Jahren wurden 10 % der Buchungen storniert.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurden zu viele Buchungen angenommen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit war sogar noch mehr als ein Platz übrig?

$$B_{50;0,9}(X \geq 49) \quad = \quad B_{50;0,9}(X = 49) + B_{50;0,9}(X = 50) \quad = \quad 0,03379$$

oder

$$B_{50;0,1}(X \leq 1) \quad = \quad B_{50;0,1}(X = 1) + B_{50;0,1}(X = 0) \quad = \quad 0,03379$$

$$B_{50;0,9}(X < 47) \quad = \quad B_{50;0,9}(X \leq 46) \quad = \quad 0,7497$$

oder

$$B_{50;0,1}(X > 3) \quad = \quad B_{50;0,1}(X \geq 4) \quad = \quad 0,7497$$

$$Intervall: \quad \mu = 45 \quad \sigma = 2,12 \quad \rightarrow \quad [43;47]$$

Die Anzahl der Buchungen sollte von Seiten des Veranstalters/Anbieters durchaus erhöht werden.

Variante: Neuen Erwartungswert festlegen: E(X) = 48

$$Erwartungswert: \quad E(X) = \mu_X \overset{!}{=} 48 \quad \rightarrow \quad n \cdot 0,9 = 48 \quad \rightarrow \quad n \approx 53$$

$$\text{Varianz:} \qquad V(X) = \sigma_X^2 = 53 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 4,8$$

$$\text{Standardabweichung:} \quad S(X) = \sigma_X = \sqrt{4,8} = 2,19$$

$$Intervall: \quad [\mu - \sigma / \mu + \sigma] \quad \rightarrow \quad [48 - 2,19 / 4802,19] \quad \xrightarrow[ganzzahlig]{diskret} \quad [46;50]$$

Seite 511 – Aufgabe 7:

7 Ein Verkehrsunternehmen gibt an, dass 95 % der Fahrgäste zufrieden seien.
Es wird angenommen, dass die Angabe des Verkehrsunternehmens stimmt.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 50 Fahrgästen höchstens zwei unzufrieden sind?

b) Stellen Sie eine Frage, zu deren Beantwortung die Wahrscheinlichkeit $\binom{50}{2} \cdot 0{,}95^{48} \cdot 0{,}05^{2}$ berechnet wird.

c) Wie viele Fahrgäste müssen mindestens befragt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einer davon unzufrieden ist?

d) Wie viele Fahrgäste müssen mindestens befragt werden, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens zwei unzufrieden sind?

e) Der Anteil zufriedener Fahrgäste hat sich nach einer Werbeaktion geändert. Die Wahrscheinlichkeit, höchstens einen unzufriedenen Fahrgast unter 100 Fahrgästen zu finden, ist auf 5 % gestiegen. Wie groß ist der Anteil zufriedener Fahrgäste nun?

a)

$$B_{50;0,05}(X \le 2) = B_{50;0,05}(X=0) + B_{50;0,05}(X=1) + B_{50;0,05}(X=2) = 0{,}5405$$

b)

$B_{50;0,05}(X \le 2)$

=> Wahrscheinlichkeit unter 50 befragten Fahrgästen genau 2 unzufriedene Fahrgäste zu erhalten

c) n gesucht:

$$B_{n;0,05}(X \ge 1) \ge 0{,}9$$

$$1 - B_{n;0,05}(X=0) \ge 0{,}9 \xrightarrow[\cdot(-1)]{-1} B_{n;0,05}(X=0) \le 0{,}1$$

$$\to \binom{n}{0} 0{,}05^{0} \cdot 0{,}95^{n} \le 0{,}1 \to 1 \cdot 1 \cdot 0{,}95^{n} \le 0{,}1$$

$$\xrightarrow{\ln} n \cdot \ln 0{,}95 \le \ln 0{,}1 \xrightarrow{:\ln 0{,}95<0} n \ge \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}95} \approx 45$$

d und e als HA 😉

Lösungen zur HA:

Teil 7d: **n gesucht**

$$B_{n;0,05}(X \geq 2) \quad \geq \quad 0,9 \quad \rightarrow$$

$$1 - B_{n;0,05}(X \leq 1) \quad \geq \quad 0,9 \quad \xrightarrow[\cdot(-1)]{-1} \quad B_{n;0,05}(X = 0) + B_{n;0,05}(X = 1) \quad \leq \quad 0,1$$

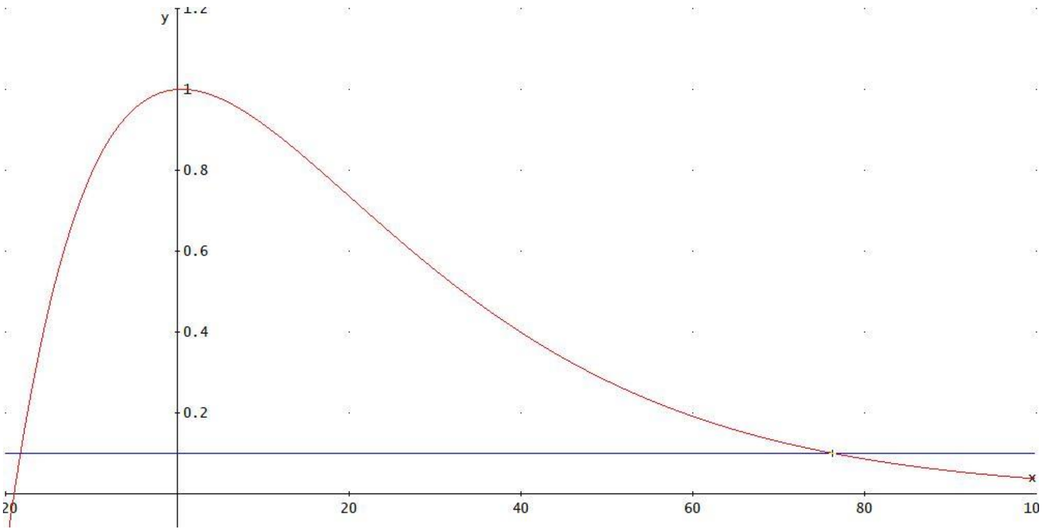
$$\rightarrow \quad \binom{n}{0} 0,05^0 \cdot 0,95^n + \binom{n}{1} 0,05^1 \cdot 0,95^{n-1} \quad \leq \quad 0,1$$

$$\rightarrow \quad 0,95^n + n \cdot 0,05 \cdot 0,95^{n-1} \quad \leq \quad 0,1$$

$$\xrightarrow{Potenzgesetz} \quad 0,95^n + n \cdot \frac{0,05}{0,95} \cdot 0,95^n \quad \leq \quad 0,1$$

$$\xrightarrow[z.B.\ Newton-Iteration]{numerische\ Lösungsverfahren} \quad n \quad \geq \quad 76,337 \quad \rightarrow \quad n \geq 77$$

Graph:



Teil 7e: **p gesucht**

$$B_{100;p}(X \leq 1) \quad = \quad 0,05 \quad \rightarrow \quad \binom{100}{0} p^0 \cdot (1-p)^{100} + \binom{100}{1} p^1 \cdot (1-p)^{99} \quad = \quad 0,05$$

$$\rightarrow \quad (1-p)^{100} + 100 \cdot p \cdot (1-p)^{99} \quad = \quad 0,05$$

$$\rightarrow \quad (1-p)^{99} \left[(1-p) + 100 \cdot p \right] \quad = \quad 0,05$$

$$\rightarrow \quad (1-p)^{99} (1 + 99p) \quad = \quad 0,05$$

$$\xrightarrow[z.B.\ Newton-Iteration]{numerische\ Lösungsverfahren} \quad p \quad = \quad 0,04656$$