

Binomischer Lehrsatz und der Beweis

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1} + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

1. Möglichkeit:

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt

Linke Seite: $(a+b)^0 = 1$

Rechte Seite: $\binom{0}{0} a^{0-0} b^0 = 1$

Induktionsschritt: Aus $A(n) \rightarrow A(n+1)$

$$(a+b)^{n+1}$$

$$= (a+b)^n (a+b)$$

$$= a(a+b)^n + b(a+b)^n$$

$$= a \left[\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \right]$$

$$+ b \left[\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \right]$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{1} a^n b^1 + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^1 b^n$$

$$+ \binom{n}{0} a^n b^1 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^n + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{1} a^n b^1 + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n+1}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n+1}{n} a^1 b^n + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{1} a^n b^1 + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n+1}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n+1}{n} a^1 b^n + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

