

Übungen zu Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Zuerst noch ein paar Formeln als Grundlage zur Berechnung der Aufgaben:

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen X mit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

Varianz einer diskreten Zufallsvariablen:

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot P(X = x_i) - \mu^2$$

Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariablen:

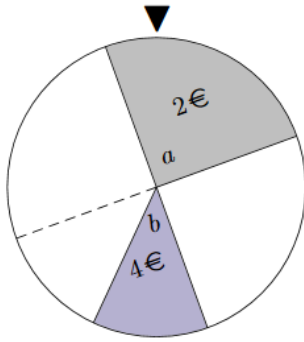
$$\sigma = S(X) = \sqrt{V(X)}$$

- (1) Der Eisverkäufer Claudio Gelatino hat auf der Zugspitze ein Eiscafé eröffnet. Bei schönem Wetter erzielt er einen Tagesgewinn von 300,00 € und bei Regen von 30,00 €. Bei Schneefall macht er 220,00 € Verlust. Die Wahrscheinlichkeit für schönes Wetter sei $P(S) = 0,25$ und für Regen $P(R) = 0,4$.
- Wie hoch ist der Erwartungswert des täglichen Gewinns für den Eisverkäufer?
 - Berechnen Sie auch die Standardabweichung.
- (2) *Jedes Los gewinnt!*
Bei einer Jahresabschlussfeier muss jeder der 100 Teilnehmer ein Los kaufen. Der 1. Preis hat einen Wert von 150,00 €, der 2. von 50,00 € und der 3. von 25,00 €. Jeder, der keinen dieser Gewinne bekommt, erhält einen Trostpreis in Höhe von 1,00 €.
- Jedes Los wird für 7,50 € verkauft. Der Erlös geht ans Friedensdorf. Wie groß ist der Erlös?
 - Wie teuer müsste ein Los sein, damit Einnahmen und Ausgaben übereinstimmen?

Anzahl	Prozentsatz
1	40%
2	30%
3	20%
4	5%
5	3%
6	2%

- (3) An einer Durchgangsstraße wird Anzahl der Personen gezählt, die in einem vorbeifahrenden Pkw sitzen (Anzahl inkl. Fahrer).
Nebenstehendes Ergebnis ließ sich ermitteln.
- Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X =$ Anzahl der Personen in einem zufällig ausgewählten Pkw.
 - Bestimmen Sie die Standardabweichung.

(4)



Der Sektor a des Glücksrads bringt einen Gewinn von 2€ , der Sektor b das Doppelte. Um den fairen Einsatz zu ermitteln, ist der durchschnittlich zu erwartende Gewinn pro Spiel zu berechnen.

(5) Erwartungswert I

In einem ZE gebe die Zufallsvariable X die Anzahl der Treffer an.

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gilt:

k	0	1	2	3	4	sonst
$P(X = k)$	$0,1 a$	$a^2 - 0,8$	$0,25 a$	$0,15 a$	$0,3$	0

- Bestimmen Sie a so, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt.
- Wie groß ist das arithmetische Mittel μ und die Standardabweichung σ der Verteilung?

(6) Erwartungswert II

In einem ZE gebe die Zufallsvariable X die Anzahl der Treffer an.

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gilt:

k	0	1	2	3	4	sonst
$P(X = k)$	$\frac{1}{20} a$	$a^2 - 3,7$	$\frac{1}{5} a$	$\frac{1}{20} a$	$\frac{1}{10}$	0

- Bestimmen Sie a so, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt.
- Wie groß ist das arithmetische Mittel μ_k der Verteilung?
- Bestimmen Sie die Standardabweichung der Verteilung und geben Sie eine Interpretation des Wertes an.

(7) Die Firma „**Sicherundbillig**“ möchte eine Haftpflichtversicherung **BeCareful** mit einem monatlichen Beitrag von $4,49\text{€}$ anbieten.

Der Vorstand verfügt über folgende Tabelle jährlicher Versicherungsfälle einer Person:

Höhe Versicherungsfall in Euro	50	100	1.000	10.000
Wahrscheinlichkeit in %	20	5	2	0,2

Beurteilen Sie das Angebot hinsichtlich des Erwartungswertes „auszahlender Versicherungssumme“ und legen Sie einen monatlichen Beitrag im Sinne eines „fairen Spiels“ fest (d.h. weder Versicherung noch Kunde haben einen finanziellen Vorteil).

(8) Die Joko GmbH produziert 3D-Blu-ray-Player. Leider treten beim neuesten Modell immer wieder zwei Fehler unabhängig voneinander auf:

- Bei 3 % der Geräte arbeitet der Lesestift fehlerhaft (Fehler A)
- 8 % der Player haben Antriebsprobleme (Fehler B)

Die durch die Fehler entstehenden Folgekosten bei Reklamationen betragen beim Fehler A 30,00 €, beim Fehler B 65,00 € und bei beiden Fehlern zusammen 80,00 €.

a) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten die jeweiligen Folgekosten auf?
(=> ein Baumdiagramm könnte helfen!)

Kosten x_i	30,00 €	65,00 €	80,00 €
$P(X=x_i)$			

- b) Wie hoch sind die durchschnittlichen Folgekosten durch die Reklamationen?
c) Durch welche Maßnahmen könnten diese Folgekosten „finanziell aufgefangen“ werden?

Nun möchte die Joko GmbH ihre Arbeitsabläufe optimieren und analysiert die Störungen im Betriebsablauf. Diese beruhen

zu 15 % auf Fehlern in der Elektrik verbunden mit Kosten von 2.400,00 € pro Woche,

zu 10 % auf mechanischen Fehlern, die durchschnittlich 4.200,00 € pro Woche verursachen,

zu 45 % auf menschlichem Versagen mit Fehlerkosten von 750,00 € pro Woche,

zu 10 % auf Pannen bei der Software mit Fehlerkosten von 7.500,00 € pro Woche.

Die übrigen Störungen ergeben sich daraus, dass die gelieferten Produkte mangelhaft sind.

Sie ziehen Kosten von 1.500,00 € wöchentlich nach sich.

- d) Mit welchen durchschnittlichen wöchentlichen Fehlerkosten ist zu kalkulieren?
e) Wie hoch ist die Standardabweichung bei den Kosten und wie ist diese zu interpretieren?

(9) Die Brauerei Trinkfit stellt eine neue Limonade her. In der Qualitätskontrolle fällt auf, dass 7,5 % aller Flaschen nicht mit der richtigen Menge befüllt und bei 4,5 % aller Flaschen der Drehverschluss nicht richtig sitzt.

Eine Kiste Limonade enthält 20 Flaschen à 0,5 Liter und soll zu einem UVP von 10,00 € angeboten werden.

Kisten mit geringer befüllten Flaschen können nur noch im Großhandel für Gastronomie zum Endpreis von 8,50 € angeboten werden.

Kisten mit defektem Verschluss zu einem Preis von 4,00 €, Flaschen mit beiden Fehlern werden nicht mehr angeboten, sondern entsorgt und neu der Produktion zugeführt, wofür Kosten von 0,50 € anfallen.

a) Ermitteln Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten der Tabelle:

Verkaufspreis	10,00 €	8,50 €	4,00 €	- 0,50 €
$P(X=x_i)$				

- b) Welche Werte nehmen Varianz und Standardabweichung an?
c) Wie ist die Standardabweichung zu interpretieren?

Die Brauerei Trinkfit bekommt zur automatischen Abfüllung ihrer Halbliterflaschen zwei Abfüllautomaten angeboten. Die Hersteller geben folgende Wahrscheinlichkeiten für Abweichungen von der Zielmenge 0,5 ltr. an:

Füllmenge in ltr.	0,48	0,49	0,5	0,51	0,52
Wahrscheinlichkeit bei Automat A	1 %	7 %	80 %	10 %	2 %
Wahrscheinlichkeit bei Automat B	10 %	3 %	60 %	7 %	20 %

d) Beraten Sie die Brauerei beim Kauf eines Abfüllungsautomaten.