Weitere Übungen mit Lösungen

Vertrauens-/Konfidenzintervall für p

Allgemeine Ansätze:

Konfidenzintervall: $X = n \cdot p \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \quad \rightarrow \quad (n \cdot p - X)^2 = z_{\frac{\alpha}{2}}^{\;2} \cdot n \cdot p \cdot (1-p)$

Konfidenzintervall (Abschätzung): $\rightarrow \quad p = p_S \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_S \cdot (1-p_S)}{n}} = p_S \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_S$

Aufgaben

1 Bestimmen Sie das 95%-Vertrauensintervall für eine Stichprobe vom Umfang n und dem Stichprobenergebnis r.

a) n = 500, r = 125
b) n = 1000, r = 250
c) n = 2000, r = 500
d) n = 1000, r = 500
e) n = 1000, r = 750
f) n = 1000, r = 900

2 Bestimmen Sie das β-Vertrauensintervall für eine Stichprobe vom Umfang n = 1000 und das Stichprobenergebnis r = 430.

a) β = 90%
b) β = 95%
c) β = 99%

3 Von 1030 zufällig befragten Personen im Alter von 18 bis 21 Jahren gaben 657 an, Raucher zu sein. Bestimmen Sie das 99%-Vertrauensintervall für den unbekannten Anteil der Raucher in dieser Altersgruppe.

4 Von 195 Patienten eines Krankenhauses, die während einer Operation in Vollnarkose 25 mg Metoclopramid erhielten, wurden 39 kurzzeitig hypoton. Dr. Steinhart, der in einem anderen Krankenhaus arbeitet, meint dazu: „Hypotonien nach Metoclopramid kommen bei mindestens einem Drittel aller Patienten vor." Was meinen Sie dazu?

5 In einer Gemeinde hatte eine Partei in der Vergangenheit einen Stimmenanteil von 30%. Bei der letzten Umfrage haben sich allerdings nur 48 von 180 befragten Personen für diese Partei ausgesprochen. Spricht das für eine Änderung des Stimmenanteils?

6 Auf einer Insel werden 75 Hasen markiert. Nach wenigen Tagen werden 52 Hasen beobachtet, von denen 16 markiert sind.
Schätzen Sie mithilfe des 95%-Vertrauensintervalls für den Anteil der markierten Hasen auf der Insel, wie viele Hasen etwa auf der Insel leben.

7 Wahr oder falsch? Begründen Sie.

a) Je kleiner der Umfang einer Stichprobe ist, desto größer wird das Vertrauensintervall für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit.
b) Wenn man zu einer beobachteten relativen Häufigkeit das Vertrauensintervall bestimmt, so weiß man, dass auch die zugehörige unbekannte Wahrscheinlichkeit eine Zahl aus diesem Intervall ist.
c) Das 90%-Vertrauensintervall ist bei derselben Stichprobe kleiner als das 95%-Vertrauensintervall.
d) Je höher das Vertrauensniveau, umso weniger genau kennt man die unbekannte Wahrscheinlichkeit.
e) Wenn man den Stichprobenumfang verdoppelt, wird das Vertrauensintervall halb so groß.

Bitte hier sowohl die exakte als auch die abgeschätzte Lösung berechnen und vergleichen:

1 Bei der Qualitätskontrolle eines Massenartikels waren von 200 überprüften Teilen zwölf defekt. Bestimmen Sie das 70%- und das 85%-Vertrauensintervall für die unbekannte Ausschussquote.

2 Von 1000 zufällig ausgewählten Abiturienten gaben 614 an, studieren zu wollen. Bestimmen Sie die Vertrauensintervalle zu

a) $\beta = 0{,}7$ b) $\beta = 0{,}8$ c) $\beta = 0{,}9$ d) $\beta = 0{,}999$

3 Begründen Sie anschaulich (ohne Formeln und ohne Rechnung), dass das Vertrauensintervall umso größer wird, je höher das vorgegebene Vertrauensniveau ist.

Lösungen: Vertrauens- & Konfidenzintervall

1 a) [0,212; 0,288] b) [0,223; 0,277]
c) [0,231; 0,269] d) [0,469; 0,531]
e) [0,723; 0,777] f) [0,881; 0,918]

2 a) [0,404; 0,456] b) [0,400; 0,461]
c) [0,390; 0,470]

3 [0,599; 0,675]

4 Das 99% (95%; 90%)-Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit, bei einer solchen Operation hypoton zu werden, ist [0,137; 0,283] ([0,150; 0,261], [0,157; 0,251]). Der von Dr. Steinhart genannte Wert liegt außerhalb. Die Patienten von Dr. Steinhart stammen offensichtlich nicht aus der gleichen Grundgesamtheit oder er übertreibt.

5 Die relative Häufigkeit beträgt zwar nur 26,7%. Das 99% (95%; 90%)-Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wähler die Partei wählt, ist aber [0,191; 0,358] ([0,207; 0,336], [0,216; 0,324]). Der alte Wert 30% liegt innerhalb. Das spricht nicht für eine Änderung des Stimmenanteils.

6 Das 95%-Vertrauensintervall für den Anteil der Hasen auf der Insel ist [0,199; 0,442]. Ist N die Zahl der Hasen auf der Insel, so entsprechen die Anteile aus diesem Intervall dem Wert 75/N.
Für N ergibt sich damit der Bereich 173 bis 377.

7 a) Wahr, denn die Intervalllänge des Vertrauensintervalls beträgt $2c\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$ (mit dem Vorfaktor c aus dem Kasten von S.529), und da in diesem Term n im Nenner steht, wird bei kleiner werdendem n die Intervalllänge größer.
b) Falsch, die zugehörige unbekannte Wahrscheinlichkeit kann auch außerhalb liegen, allerdings ist dann die Wahrscheinlichkeit für die beobachtete relative Häufigkeit sehr gering.
c) Wahr, beim 90%-Vertrauensintervall beträgt die Intervalllänge $2 \cdot 1{,}64\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$, beim 95%-Vertrauensintervall beträgt die Intervalllänge $2 \cdot 1{,}96\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$.
d) Wahr, denn je höher das Vertrauensniveau, desto größer ist das Vertrauensintervall. Denn wenn ß steigt, steigt auch c und damit die Intervalllänge.
e) Falsch, denn die Intervalllänge des Vertrauensintervalls ist zu $\frac{1}{\sqrt{n}}$ proportional. Bei doppeltem Stichprobenumfang ändert sich die Intervallänge auf das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-fache.

⇨ Genau und abgeschätzt:

1 Vertrauensintervall [a; b] für $\beta = 70\,\%$:
[0,044 834 04; 0,079 867 16] exakt
[0,042 595 32; 0,077 404 68] Näherung
Vertrauensintervall [a; b] für $\beta = 85\,\%$:
[0,040 043; 0,088 981 4] exakt
[0,035 826 16; 0,084 173 84] Näherung

2 a) Vertrauensintervall [a; b]
[0,597 929 94; 0,629 825 4] exakt
[0,598 044 18; 0,629 955 82] Näherung
b) Vertrauensintervall [a; b]
[0,594 098 97; 0,633 527 18] exakt
[0,594 270 6; 0,633 729 4] Näherung
c) Vertrauensintervall [a; b]
[0,588 402 3; 0,638 982 5] exakt
[0,588 677 59; 0,639 322 41] Näherung
d) Vertrauensintervall [a; b]
[0,562 378 68; 0,663 179 08] exakt
[0,563 342 56; 0,664 657 44] Näherung

3 Je größer man einen Bereich macht, desto sicherer enthält er eine unbekannte Größe.

Mindestumfang einer Stichprobe (Allgemeiner Ansatz):

$$n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^{\;2}}{d^2} \cdot p_S \cdot (1 - p_S) \xrightarrow[p \text{ unbekannt}]{p(\max) = \frac{1}{2}} n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^{\;2}}{4d^2}$$

$$mit\ d = |h - p| \quad \text{bzw. zugelassener Abweichung}$$

Beispiel zum Thema Mindestumfang einer Stichprobe:

Ein Discounter möchte in einer Aktion Blumenzwiebeln anbieten. Eine Großgärtnerei bietet ihm Billigware an – allerdings ohne Angabe einer Wahrscheinlichkeit p, mit der die Zwiebeln aufblühen. Der Discounter möchte diese Wahrscheinlichkeit vor Vertragsabschluss bestimmen.

a) Wie viele Zwiebeln müssen mindestens geprüft werden, damit die Länge des 80%-Vertrauensintervalls unter 0,01 liegt (man spricht von einer „absoluten Genauigkeit" ±1%)?

b) Welches Vertrauensintervall erhält man bei diesem Stichprobenumfang für $h = 94\%$?

c) Welches Vertrauensintervall erhält man für $h = 0{,}5$?

Lösung: a) für $\beta = 0{,}8$ ist $c = 1{,}282$.

Mit der Intervalllänge $l = 0{,}01$ ergibt sich der erforderliche Mindeststichprobenumfang zu

$n = \frac{c^2}{l^2} = \frac{1{,}282^2}{0{,}01^2} = 16435.$

b) Das 80%-Vertrauensintervall ist $[0{,}93758; 0{,}94233]$.

Die tatsächliche Intervalllänge 0,00475 ist deutlich kleiner als gefordert.

(Mit der Näherungsformel ergibt sich fast das gleiche Intervall $[0{,}93763; 0{,}94237]$).

c) Für $h = 0{,}5$ erhält man das Vertrauensintervall $[0{,}49500; 0{,}50500]$ mit Länge 0,01.

Übungen:

11 Ein Medikament wirkt mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeit p. An wie vielen Patienten muss es getestet werden, damit das zugehörige 95%-Vertrauensintervall für p die Länge 0,02 hat?

12 Am Wahltag der Bundestagswahl 2005 wurden 102713 Wählerinnen und Wähler für die ARD beim Verlassen des Wahllokals zu ihrer Wahlentscheidung befragt.

a) Für die FDP wurde in der ersten Hochrechnung um 18 Uhr ein Stimmenanteil von 10,5% angegeben. Am Ende waren es nur 9,8%. Was meinen Sie dazu?

b) Wie würde es sich auf die Länge des Vertrauensintervalls auswirken, wenn man nur 25000 Wähler befragen würde?

c) Wie viele Wähler müsste man für eine Hochrechnung befragen, sodass die Länge der 95%-Vertrauensintervalle für die Stimmenanteile aller Parteien höchstens 0,2% betragen würde?

13 Bei der Qualitätskontrolle eines Massenartikels waren von 200 überprüften Teilen 12 defekt.

a) Bestimmen Sie das 95%-Vertrauensintervall für die unbekannte Ausschusswahrscheinlichkeit.

b) Für welche natürlichen Zahlen r gilt: Bei dem Stichprobenumfang 200r und 12r defekten Teilen ist die 95%-Vertrauensintervalllänge kleiner als 0,04?

Lösungen: Mindestumfang einer Stichprobe

11 Nach dem Satz in der Infobox auf Seite 531 des Schülerbuches muss gelten: $n \geq \frac{1{,}96^2}{0{,}02^2} = 9604$. Man müsste etwa 9600 Patienten testen.

12 a) Die FDP hätte nach der Hochrechnung etwa 10785 Wähler in der Stichprobe, vorausgesetzt, alle befragten Wähler waren bei der Hochrechnung schon berücksichtigt. Das 99 % (95 %; 90 %)-Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wähler die FDP wählt, wäre dann [0,1025; 0,1075] ([0,1031; 0,1069], [0,1034; 0,1066]). Damit wäre ein Stimmanteil von nur 9,8 % äußerst unwahrscheinlich, aber natürlich auch nicht unmöglich. Mögliche Gründe für die starke Abweichung könnten aber auch sein: nicht alle Befragungsergebnisse waren zu dem frühen Zeitpunkt berücksichtigt, die Befragung war nicht ausreichend repräsentativ.

b) Die Länge der Vertrauensintervalle wäre etwa doppelt so groß. Dann erscheint das Ergebnis von Teilaufgabe a) nicht mehr so unwahrscheinlich.

c) Nach dem Satz in der Infobox müsste gelten: $n \geq \frac{1{,}96^2}{0{,}002^2} = 960400$. Man müsste also etwa 1000000 Wähler fragen.

13 a) Das 95 %-Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Artikel Ausschuss ist, beträgt [0,027; 0,093]. Intervalllänge: 0,066.

b) Nach dem Satz in der Infobox müsste gelten: $n \geq \frac{1{,}96^2}{0{,}04^2} = 2401$. Demnach wäre r mindestens 12. Mit dem Stichprobenumfang $n = 2400$ und $r = 144$ hat das 95 %-Vertrauensintervall [0,051; 0,070] die Länge 0,02. Also müsste bereits bei einem Viertel des Stichprobenumfangs die Länge 0,04 erzielt werden. Für $r = 3$ erhält man in der Tat das Vertrauensintervall [0,041; 0,079] mit der Länge 0,038. Es reicht also, r mindestens 3 zu wählen. Der Satz in der Infobox liefert hier ein relativ schlechtes Ergebnis, weil h weit weg von 0,5 liegt und damit $h(1 - h)$ viel kleiner als $\frac{1}{4}$ ist (vgl. die Herleitung in der Infobox).

Normalverteilung

1 Eine stetige Zufallsgröße X ist normalverteilt mit $\mu = 120$ und $\sigma = 10$. Berechnen Sie.

a) $P(X < 120)$ b) $P(X \leq 120)$ c) $P(110 \leq X \leq 130)$
d) $P(120 < X < 140)$ e) $P(130 \leq X)$ f) $P(130 = X)$

2 Eine ganzzahlige Zufallsgröße X lässt sich näherungsweise durch eine Normalverteilung mit $\mu = 120$ und $\sigma = 10$ beschreiben.
Berechnen Sie mit Stetigkeitskorrektur näherungsweise.

a) $P(X < 120)$ b) $P(X \leq 120)$ c) $P(110 \leq X \leq 130)$
d) $P(120 < X < 140)$ e) $P(130 \leq X)$ f) $P(130 = X)$

5 Eine stetige Zufallsgröße X ist normalverteilt mit $\mu = 30$ und $\sigma = 2$.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stichprobenwert von X im Intervall $[26; 34]$ liegt.
b) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit in Teilaufgabe a), wenn man σ verändert?
c) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit in Teilaufgabe a), wenn man μ verändert?

8 Der Spritverbrauch eines Pkw (in Liter/100 km) im Stadtverkehr ist normalverteilt mit $\mu = 8{,}2$ und $\sigma = 1{,}8$. In welchem Intervall mit Mittelpunkt μ liegt der Spritverbrauch mit der angegebenen Wahrscheinlichkeit?

a) 50 % b) 80 % c) 90 % d) 95 % e) 99 %

9 Eine stetige Zufallsgröße X ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 12$ und $\sigma = 5$.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(11 < X < 13)$; $P(11{,}5 < X < 12{,}5)$; $P(11{,}9 < X < 12{,}1)$; $P(X = 12)$.
b) Multiplizieren Sie $\varphi_{12;5}(12)$ mit 2; mit 1; mit 0,2.
Veranschaulichen Sie den Zusammenhang mit den Ergebnissen von Teilaufgabe a).

…

6 Ein Zufallszahlengenerator lieferte bei 100 Versuchen die relative „Trefferhäufigkeit" $h = 0{,}86$.
a) Schätzen Sie die Vertrauensintervalle zu den Niveaus $\beta = 90\,\%$ und $\beta = 95\,\%$ nach Gefühl. Kommentieren Sie Ihre Schätzung.
b) Überprüfen Sie Ihre Schätzungen durch eine Rechnung.
c) Wie würden sich die Ergebnisse ändern, wenn unter der relativen Häufigkeit $h = 0{,}86$ nicht 100, sondern 400 Versuche gesteckt hätten?

7 Statistiker sagen: „Wenn eine unbekannte angenommene" Wahrscheinlichkeit p außerhalb des 95 %-Vertrauensintervalls (zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h) liegt, dann ist diese „angenommene" Wahrscheinlichkeit mit der Beobachtung nicht vereinbar. Untersuchen Sie, ob die Annahme $p = 0{,}5$ mit der Beobachtung $h = 0{,}51$ vereinbar ist, wenn der Versuchsumfang, der der relativen Häufigkeit h zugrunde lag, folgenden Wert hat

a) $n = 100$, b) $n = 1000$, c) $n = 10\,000$.

d) Wie hoch müsste der Versuchumfang n sein, damit die relative Häufigkeit $h = 0{,}501$ mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ nicht mehr vereinbar ist.

Lösungen: Normalverteilung

1 a) 0,5 b) 0,5 c) 0,6827
d) 0,4772 e) 0,1587 f) 0

2 a) 0,4801 b) 0,5199 c) 0,7063
d) 0,4545 e) 0,1711 f) 0,0242

5 a) 0,9545 (2-σ-Intervall)
b) Wenn (bei gleichem μ) σ wächst, wird diese Wahrscheinlichkeit kleiner.
c) Wenn sich (bei gleichem σ) μ ändert, wird die Wahrscheinlichkeit kleiner.

8

	linke Intervallgrenze	rechte Intervallgrenze
a)	6,99	9,41
b)	5,89	10,51
c)	5,24	11,16
d)	4,67	11,73
e)	3,56	12,83

9 a) 0,158 519; 0,079 656; 0,015 957; 0,000 000
b) 0,159 577; 0,079 788; 0,015 958
Man erkennt: Wenn man den Funktionswert der Wahrscheinlichkeitsdichte mit der Intervallbreite multipliziert, erhält man näherungsweise die Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Intervalls. Die Übereinstimmung ist umso besser, je kleiner das Intervall ist.

7
a) vereinbar
b) vereinbar
c) nicht vereinbar, die Untergrenze des 95%-Vertrauensintervalls ist 0,500 200 2, damit liegt 0,5 nicht mehr in diesem Intervall.
d) Das 95%-Intervall zu $p = 0{,}5$ darf 0,501 nicht mehr enthalten, den gesuchten Wert für n erhält man aus der Gleichung
$1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{0{,}5 \cdot 0{,}5}}{\sqrt{n}} = 0{,}001$ zu $n = 960{,}401$.
Wenn man also Wahrscheinlichkeiten sehr genau bestimmen möchte, braucht man praktisch kaum noch realisierbar hohe Stichprobenzahlen.

6
a) individuell, das Intervall zum 95%-Niveau muss etwas größer sein
b) die exakten Vertrauensintervalle sind [0,793; 0,908] bzw. [0,779; 0,915]
c) die exakten Vertrauensintervalle verkleinern sich zu [0,839; 0,886] bzw. [0,823; 0,891]