

Zusammenstellung Infos von der bedingten Wahrscheinlichkeit bis zum Satz von Bayes

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit Definition

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass das Ereignis A eintritt, wenn Ereignis B eingetreten ist.

Hinweis

Die Begriffe "Ereignis" und "Ereigniseintritt" darf man nicht zu eng bzw. buchstäblich auslegen, auf eine bedingte Wahrscheinlichkeit zielt z.B. auch die Frage: *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person krank ist (Ereignis A), wenn sie Fieber hat (Ereignis B)?* oder *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fußballspiel noch gewonnen wird, wenn man nach der ersten Halbzeit 0:2 zurückliegt?*

Man weiß in dem Fall etwas – Fieber, 0:2 Rückstand – und dadurch ändern sich die ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit wird oft als $P(A | B)$ oder $P_B(A)$ dargestellt

⇒ (mit P für *Probability* oder ursprünglich lateinisch *probabilitas*).

Die Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten setzt voraus, dass die Ereignisse nicht *stochastisch unabhängig* sind.

Beispiel

Das Ziehen einer Zahl (z.B. die Zahl 7) beim Lotto "6 aus 49" hat bei der ersten Ziehung einer Kugel die Wahrscheinlichkeit $1/49$.

Wurde die Zahl 7 als erste Kugel gezogen, ist die Wahrscheinlichkeit für die 7 bei der Ziehung der zweiten Kugel 0 % (die Kugel ist ja schon draußen) — mit anderen Worten: die **bedingte Wahrscheinlichkeit** für die Zahl 7, unter der Bedingung, dass als erste Kugel die 7 gezogen wurde, ist 0 %.

Die Wahrscheinlichkeit für die Ziehung einer anderen Zahl (z.B. 22) bei der Ziehung der zweiten Kugel ist $1/48$, da nur noch 48 Kugeln in der Trommel enthalten sind.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten lassen sich in einer *Vierfeldertafel* darstellen und berechnen.

Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A | B) = P(A \text{ UND } B) / P(B) \text{ oder } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

In Worten: Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, wenn B eingetreten ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und B eintreten geteilt durch die Wahrscheinlichkeit für B.

Bezogen auf das Beispiel zur *Vierfeldertafel*:

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A | B)$ für das Ereignis A (es handelt sich um einen Jungen), wenn Ereignis B (Schüler ist im Sportverein) gegeben / bekannt ist, berechnet sich mit:

$$P(A | B) = P(A \text{ UND } B) / P(B)$$

$$P(A | B) = (9/30) / (18/30) = 9/18 = 1/2 = 0,5 (= 50 \%)$$

Dabei ist $9/30$ die Wahrscheinlichkeit bzw. der Anteil von allen Schülern, die Jungen sind und zugleich Mitglied im Sportverein und $18/30$ ist die Wahrscheinlichkeit bzw. der Anteil der Schüler, die in einem Sportverein sind.

Stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit Definition

Stochastische Unabhängigkeit bedeutet die Unabhängigkeit von Ereignissen bzw. Merkmalen.

Beispiel

Angenommen, wir werfen eine Münze 2 Mal. Wenn man ein Ereignis A als "Zahl beim ersten Wurf" und ein Ereignis B als "Zahl beim zweiten Wurf" definiert, sind die beiden Ereignisse stochastisch voneinander unabhängig, da die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B (50 %) nicht davon beeinflusst wird, was im ersten Wurf passiert ist.

Das gilt auch umgekehrt: die Wahrscheinlichkeit, dass beim ersten Wurf die Zahl oben ist, beträgt 50 % und zwar unabhängig davon, was beim zweiten Wurf passiert.

Es hilft in dem Fall für die Einschätzung des zweiten Wurfs nichts, wenn man über das Ergebnis des ersten Wurfs informiert ist.

Auch die Ergebnisse beim Roulette (die Zahlen, auf die die Kugel fällt) oder die Ergebnisse beim mehrmaligen Würfeln sind stochastisch unabhängig.

Ist die stochastische Unabhängigkeit gegeben, lassen sich einfache Wahrscheinlichkeiten berechnen.

Beispiel

Stochastische Unabhängigkeit ist gegeben, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A *und* Ereignis B eintreten dem Produkt der (Einzel-)Wahrscheinlichkeiten für A und B entsprechen. Im Münzbeispiel:

$$P(A \text{ und } B) = P(A) \cdot P(B) = 1/2 \times 1/2 = 1/4.$$

Das Gegenteil – **stochastische Abhängigkeit** – ist gegeben, wenn Ereignisse voneinander abhängen, wie dies in der Realität auch oft der Fall ist (das Einkommen hängt von der beruflichen Qualifikation ab, Krankheiten hängen von bestimmten Risikofaktoren ab etc.; vgl. das Beispiel zur [Vierfeldertafel](#)); in dem Fall lassen sich [bedingte Wahrscheinlichkeiten](#) berechnen.

KORRESPONDIERENDE/ALTERNATIVE BEGRIFFE: statistische Unabhängigkeit, unabhängige Ereignisse.

Bedingung:
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{\cdot P(B)} P_B(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$\text{Zwei Ereignisse sind stochastisch unabhängig} \Leftrightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Vierfeldertafel

Vierfeldertafel Definition

Die **Vierfeldertafel** als vereinfachte Kontingenztafel bzw. [Kreuztabelle](#) stellt in der Statistik Zusammenhänge zwischen zwei Variablen / Merkmalen mit jeweils 2 Ausprägungen (sogenannte binäre bzw. dichotome Merkmale) dar und kann dazu benutzt werden, bedingte Wahrscheinlichkeiten darzustellen und zu berechnen.

ALTERNATIVE BEGRIFFE: 4-Felder-Tafel, Vier-Felder-Tafel.

Beispiel

Vierfeldertafel Beispiel

In einer Grundschulklasse mit 30 Schülern sind 18 Mädchen und 12 Jungen. Von den Mädchen sind 9 in einem Sportverein (und die anderen 9 nicht), von den Jungen sind ebenfalls 9 in einem Sportverein (und die anderen 3 nicht).

Dies lässt sich in einer Vierfeldertafel so darstellen:

Vierfeldertafel			
	Mädchen	Jungen	Gesamt
im Sportverein	9	9	18
nicht im Sportverein	9	3	12
Gesamt	18	12	30

Mit der Vierfeldertafel lassen sich jetzt einfache Wahrscheinlichkeiten (1. Beispiel) bzw. [bedingte Wahrscheinlichkeiten](#) (2. Beispiel) berechnen:

Beispiel 1 (einfache Wahrscheinlichkeit)

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig ausgewählter Schüler (zum Beispiel durch Ziehen eines Namens aus einer Lostrommel mit den 30 Schülernamen) ein Mädchen ist?

Die Wahrscheinlichkeit ist Anzahl der Mädchen / Anzahl der Schüler = $18/30 = 3/5 = 60\%$.

Beispiel 2 (bedingte Wahrscheinlichkeit)

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig ausgewählter Schüler, der in einem Sportverein ist, ein Junge ist?

Die Wahrscheinlichkeit ist Anzahl der Jungen in einem Sportverein / Anzahl der Schüler in einem Sportverein = $9/18 = 1/2 = 50\%$.

Würde man dieselbe Fragestellung auch noch für Mädchen beantworten (das wären ebenfalls $9/18 = 50\%$), dann würden die beiden Wahrscheinlichkeiten die **bedingte Verteilung** des Geschlechts unter der Bedingung, dass der Schüler im Sportverein ist, darstellen.

Test auf statistische Unabhängigkeit

Mit der Vierfeldertafel lässt sich untersuchen, ob die beiden Merkmale – Geschlecht und Sportvereinsmitgliedschaft – statistisch unabhängig sind.

Im Falle statistischer Unabhängigkeit müsste zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit für Junge ($12/30$) multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit für Sportvereinsmitgliedschaft ($18/30$) gleich der Wahrscheinlichkeit für einen Jungen im Sportverein ($9/30$) sein; $12/30 \times 18/30$ ist jedoch $216/30 = 7,2$ und dies entspricht nicht $9/30$ bzw. $0,3$

— das heißt, die beiden Merkmale sind nicht statistisch unabhängig oder anders ausgedrückt: die Wahrscheinlichkeit bzw. Häufigkeit für eine Mitgliedschaft in einem Sportverein ist (in diesem Beispiel) vom Geschlecht abhängig.

Kreuztabelle – Vierfeldertafel wird erweitert 😊

Kreuztabelle Definition

In einer **Kreuztabelle** bzw. **Kontingenztabelle** können statistische Merkmale bzw. Variablen (i.d.R. nominal- oder ordinalskalierte Merkmale, da man üblicherweise bei metrischen Merkmalen zu viele Ausprägungen hat) mit ihren jeweiligen absoluten Häufigkeiten dargestellt werden. Hiermit lassen sich die gemeinsame Verteilung bzw. die gemeinsamen Häufigkeiten, die Randverteilungen bzw. Randhäufigkeiten und bedingte Verteilungen darstellen und auswerten.

In der Kreuztabelle können die Merkmale jeweils mehrere Merkmalsausprägungen haben (z.B. das Merkmal Farbe mit den 4 Merkmalsausprägungen rot / grün / blau / gelb und Gewicht mit den 3 Merkmalsausprägungen leicht / mittel / schwer); liegen nur 2 Merkmale mit jeweils nur 2 Merkmalsausprägungen vor, handelt es sich um eine sog. Vierfeldertafel (bzw. 2×2 - Kontingenztafel).

ALTERNATIVE BEGRIFFE: bivariate Häufigkeitsverteilung, Kontingenztabelle, Kontingenztafel, Mehrfelder-tafel.

Kontingenztafel Beispiel

Eine Universität erfasst ein Jahr nach dem Abschluss eines BWL-Jahrgangs mittels einer Umfrage unter den 100 Absolventinnen und Absolventen das Geschlecht und in welchen Bereichen sie arbeiten (der Einfachheit halber soll es nur die 3 Bereiche Controlling, Personal und Marketing geben).

Es werden also 2 nominalskalierte Merkmale erfasst: Geschlecht und Fachbereich.

Die gemeinsame Verteilung der beiden Merkmale mit ihren absoluten Häufigkeiten sei in folgender Kreuzta-belle zusammengefasst:

Kontingenztafel				
	Controlling	Personal	Marketing	Gesamt
weiblich	10	30	20	60
männlich	20	10	10	40
Gesamt	30	40	30	100

Die jeweils in der "Gesamt"-Zeile und -Spalte angegebenen Summen sind die sog. **Randhäufigkeiten**.

Alternativ oder zusätzlich kann auch die gemeinsame Verteilung der beiden Merkmale mit ihren relativen Häufigkeiten dargestellt werden:

Kontingenztafel				
	Controlling	Personal	Marketing	Gesamt
weiblich	0,10	0,30	0,20	0,60
männlich	0,20	0,10	0,10	0,40
Gesamt	0,30	0,40	0,30	1,00

Bedingte Verteilung

Anhand der Kreuztabelle können sog. bedingte Verteilungen ermittelt werden. Hier wird eine Merkmalsausprägung vorgegeben (z.B. der Fachbereich) und es wird die Verteilung des zweiten Merkmals (weiblich oder männlich) untersucht und dargestellt.

So ist z.B. die bedingte Verteilung für das vorgegebene Merkmal Fachbereich mit der Ausprägung "Controlling": 10 weiblich und 20 männlich bzw. ca. 33 % weiblich (10 von 30 Controllern) und ca. 67 % männlich (20 von 30); es werden also die Werte durch die Randhäufigkeiten geteilt.

Bedingte Verteilung			
	weiblich	männlich	Gesamt
Controlling	0,33	0,67	1,00

Es lassen sich somit erste Zusammenhänge erkennen.

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Totale Wahrscheinlichkeit Definition

Mit der sog. **totalen Wahrscheinlichkeit** bzw. über den **Satz der totalen Wahrscheinlichkeit** können Wahrscheinlichkeiten berechnet werden, wenn die [bedingten Wahrscheinlichkeiten](#) bekannt sind.

Für die Berechnung der totalen Wahrscheinlichkeit werden die bedingten Wahrscheinlichkeiten gewichtet und aufaddiert.

Als Formel:

$P(B) = \sum$ über $i = 1$ bis n für $P(B | A_i) \times P(A_i)$ oder

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P_{A_i}(B) \cdot P(A_i) \quad [= \text{Summe aus bed. W'keiten}]$$

ALTERNATIVE BEGRIFFE: Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

Beispiel: totale Wahrscheinlichkeit berechnen

Gegeben seien die Daten des Beispiels zum [Satz von Bayes](#):

Ein Unternehmen hat 2 Werke, in dem dasselbe Produkt hergestellt wird:

- Werk A_1 stellt 70 % der Gesamtstückzahl her, die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Produkt in Werk A_1 sei 10 %; dies ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt defekt ist, wenn es aus Werk A_1 kommt (Bedingung);
- Werk A_2 stellt die restlichen 30 % her, die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Produkt in Werk A_2 sei 20 %; dies ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt defekt ist, wenn es aus Werk A_2 kommt.

Wie groß ist die (totale) Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt defekt ist?

Dabei seien

- P: Abkürzung für Wahrscheinlichkeit (*probability*)
- A_1 : "Produkt kommt aus Werk A_1 " und A_2 : "Produkt kommt aus Werk A_2 "
- B: "Produkt defekt" mit P(B) als Wahrscheinlichkeit für ein defektes Produkt

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \sum_{i=1}^2 P_{A_i}(B) \cdot P(A_i) = P_{A_1}(B) \cdot P(A_1) + P_{A_2}(B) \cdot P(A_2)$$

$$P(B) = 0,1 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,13 = 13 [\%]$$

Satz von Bayes

Satz von Bayes Definition

Der **Satz von Bayes** basiert auf [bedingten Wahrscheinlichkeiten](#) und erlaubt, aus der Kenntnis des Ergebnisses Rückschlüsse zu ziehen.

Ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B | A_k) = P_{A_k}(B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(A_k)}$

bekannt, kann mit der Bayes-Formel die Wahrscheinlichkeit für

$$P(A_k | B) = P_B(A_k) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} \text{ berechnet werden:}$$

$$P(A_k | B) = P_B(A_k) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A_k | B) = P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B) \cdot P(A_k)}{P(B)}$$

$$P(A_k | B) = P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P_{A_i}(B) \cdot P(A_i)}$$

NR 1:

$$P(B | A_k) = P_{A_k}(B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(A_k)}$$

$$P(B | A_k) \cdot P(A_k) = P_{A_k}(B) \cdot P(A_k) = P(A_k \cap B)$$

NR 2:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P_{A_i}(B) \cdot P(A_i) \quad [= \text{Summe aus bed. W'keiten}]$$

Damit lassen sich Fragestellungen umdrehen.

ALTERNATIVE BEGRIFFE: Bayessche Formel, Bayessche Regel, Bayes-Theorem.

Beispiel

Beispiel: Satz von Bayes

Ein Unternehmen hat 2 Werke, in dem dasselbe Produkt hergestellt wird:

- Werk A_1 stellt 70 % der Gesamtstückzahl her, die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Produkt in Werk A_1 sei 10 %; dies ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt defekt ist, wenn es aus Werk A_1 kommt (Bedingung);
- Werk A_2 stellt die restlichen 30 % her, die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Produkt in Werk A_2 sei 20 %; dies ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt defekt ist, wenn es aus Werk A_2 kommt.

Ein Kunde reklamiert ein defektes Produkt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt aus dem Werk A_1 stammt?

Die Antwort darauf gibt der Satz bzw. die **Formel von Bayes**.

Dabei sei:

- P: Abkürzung für Wahrscheinlichkeit (*probability*)
- A_1 : "Produkt kommt aus Werk A_1 " und A_2 "Produkt kommt aus Werk A_2 "
- B: "Produkt defekt" mit $P(B)$ als Wahrscheinlichkeit für ein defektes Produkt

$$\text{Ansatz: } P(A_k | B) = \frac{P_{A_k}(B) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P_{A_i}(B) \cdot P(A_i)} \rightarrow \frac{P_{A_1}(B) \cdot P(A_1)}{P_{A_1}(B) \cdot P(A_1) + P_{A_2}(B) \cdot P(A_2)}$$

$$P(A_1 | B) = \frac{P_{A_1}(B) \cdot P(A_1)}{P_{A_1}(B) \cdot P(A_1) + P_{A_2}(B) \cdot P(A_2)}$$

$$P(A_1 | B) = \frac{0,1 \cdot 0,7}{0,1 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3} = \frac{0,07}{0,13} = 0,5385 \approx 53,85 [\%]$$

Dabei ist

- 0,1 die Defekt-Wahrscheinlichkeit in Werk A_1 (die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt defekt ist, wenn es aus Werk A_1 kommt),
- 0,7 die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt aus Werk A_1 kommt (letztlich ist das hier der Produktionsanteil des Werkes A_1),
- 0,3 die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt aus Werk A_2 kommt (der Produktionsanteil des Werkes A_2) und
- 0,2 die Defekt-Wahrscheinlichkeit in Werk A_2 (die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt defekt ist, wenn es aus Werk A_2 kommt).

Im Nenner der Formel steht die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Teil (letztlich die [totale Wahrscheinlichkeit](#)): Werk A produziert 70 %, davon sind 10 % defekt, ergibt 7 % bzw. 0,07; Werk B produziert 30 %, davon sind 20 % defekt, ergibt 6 % bzw. 0,06; in Summe sind 13 % der Teile defekt.

Die berechnete Wahrscheinlichkeit von 53,85 % bezeichnet man auch als **A-posteriori-Wahrscheinlichkeit** (die Wahrscheinlichkeit, wenn man Kenntnis über etwas erlangt hat, hier bzgl. des Defekts; lateinisch *a posteriori*):

im Nachhinein), während die sog. **A-priori-Wahrscheinlichkeit** (lateinisch *a priori*: von vornherein), dass ein Produkt aus dem Werk A kommt, bei 70 % lag.

Kontrollrechnung

Angenommen, die Produktionsmenge ist 100. Dann kommen aus Werk A₁ 70 Stück und aus Werk A₂ 30 Stück. Aus Werk A₁ kommen 7 defekte Produkte (10 % von 70) und aus Werk A₂ kommen 6 defekte Produkte (20 % von 30).

In Summe sind das 13 defekte Produkte. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein defektes Produkt aus Werk A₁ kommt, ist dann $7/13 = 0,5385$ (und die Wahrscheinlichkeit, dass ein defektes Produkt aus Werk A₂ kommt, ist entsprechend $6/13 = 0,4615$).

Quelle:

[Statistik | Statistik - Welt der BWL \(welt-der-bwl.de\)](http://www.welt-der-bwl.de)

Beispiel

- Betrachten eine Fußballmannschaft, deren Siegeschance je Bundesliga-Spiel bei 75% liegt, falls ihr Kapitän in guter Form ist.
- Falls ihr Kapitän jedoch nicht in guter Form ist, dann betrage ihre Siegeschance nur 40%.
- Bei 70% aller Bundesliga-Spiele seiner Mannschaft sei der Kapitän in guter Form.
- Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass
 1. die Mannschaft ein Bundesliga-Spiel gewinnt,
 2. der Kapitän bei einem Bundesliga-Spiel in guter Form ist, obwohl die Mannschaft das Spiel nicht gewinnt.

• *Lösung:* Zerlegen den Grundraum Ω auf zwei verschiedene Weisen in zwei Komponenten.

• Sei $A = \{\text{Kapitän ist in guter Form}\}$, $A^c = \{\text{Kapitän ist nicht in guter Form}\}$ bzw.

$B = \{\text{Mannschaft gewinnt Bundesliga-Spiel}\}$, $B^c = \{\text{Mannschaft gewinnt Bundesliga-Spiel nicht}\}$

$$P(B | A) = 0.75 \quad P(B | A^c) = 0.40 \quad P(A) = 0.70$$

• Dann gilt

• Aus (15) bzw. (16) ergibt sich nun

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B | A)P(A) + P(B | A^c)P(A^c) \\ &= 0.75 \cdot 0.70 + 0.40 \cdot 0.3 = 0.645 \end{aligned}$$

•

• bzw.

$$\begin{aligned} P(A | B^c) &= \frac{P(B^c | A)P(A)}{P(B^c | A)P(A) + P(B^c | A^c)P(A^c)} \\ &= \frac{0.25 \cdot 0.70}{0.25 \cdot 0.70 + 0.60 \cdot 0.30} = 0.493 . \end{aligned}$$

[Formel der totalen Wahrscheinlichkeit; Bayessche Formel \(uni-ulm.de\)](http://www.uni-ulm.de)