Summenzeichen $\sum$

Das Summenzeichen $\sum$ (Sigma aus dem griechischen Alphabet) mit einem Laufindex kürzt im Wesentlichen eine algebraische Summe mit einer großen Anzahl von Summanden ab. *Damit spart man sich viel Schreibarbeit.*

Bezeichnungen am Summenzeichen:

Beispiel:	a:	Summationsvariable
$\sum_{i=1}^{18} a_i$	i:	Laufindex; nimmt hier die Werte von 1 bis 18 in aufsteigender Form nacheinander an
	1: untere Grenze;	18: obere Grenze

Die Wahl zur Bezeichnung des Laufindex ist nicht von Bedeutung. Gewöhnlich werden hierfür verschiedene Buchstaben des Alphabets verwendet.

<u>Beispiel 1:</u>

Die Summe **S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 32 + 34 + 36** soll unter Verwendung des Summenzeichens geschrieben werden.

Jeder Summand ist hier durch 2 teilbar und man kann die Summe auch als

S = 2*1 + 2*2 + 2*3 + 2*4 + 2*5 + ... + 2*16 + 2*17 + 2*18

schreiben. Da die 2 immer auftaucht, ist sie eine Konstante in dieser Summe.

Der Laufindex i dieser Summe nimmt die Werte von 1 bis 18 an.

Somit kann man verkürzt schreiben:

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{18} 2i \overset{\text{Konstante}}{\underset{\text{ausklammern}}{=}} 2\sum_{i=1}^{18} i}$$

Oft wird das Ergebnis einer Summe gesucht, wobei nur die abgekürzte Summenform gegeben ist.

Ziel ist, die Summe mit Summanden darzustellen und zu berechnen.

Beispiel 2:

Hier werden die Zahlen 1 bis 5 für den Laufindex i eingesetzt

$$\sum_{i=1}^{5} i = \underset{\substack{\uparrow \\ i=1}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ i=2}}{2} + \underset{\substack{\uparrow \\ i=3}}{3} + \underset{\substack{\uparrow \\ i=4}}{4} + \underset{\substack{\uparrow \\ i=5}}{5}$$

$$\textit{für} \quad i=1 \quad i=2 \quad i=3 \quad i=4 \quad i=5$$

Beispiel 3:

Da der Laufindex k als Hochzahl verwendet wird, variiert nun die Potenz der Zahl 4 von 0 bis 3.

$$\sum_{k=0}^{3} 4^k = \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{4^0} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=1}}{4^1} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=2}}{4^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=3}}{4^3}$$

$$\textit{für} \quad k=0 \quad k=1 \quad k=2 \quad k=3$$

Beispiel 4:

Wie man hier erkennt, fehlt der Laufindex und man hat nur eine Konstante. In diesem Fall kann die Konstante 6 mit der Zahl 5 multipliziert werden.

$$\sum_{k=1}^{5} 6 = \underset{\substack{\uparrow \\ k=1}}{6} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=2}}{6} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=3}}{6} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=4}}{6} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=5}}{6} = 6 \cdot 5 = 30$$

$$\textit{für} \quad k=1 \quad k=2 \quad k=3 \quad k=4 \quad k=5$$

Sollte die Untergrenze allerdings nicht bei 1 beginnen, so muss die Summe wie folgt berechnet werden:

Konstante * (Obergrenze – Untergrenze + 1)

$$\sum_{k=3}^{8} 6 = \underset{\substack{\uparrow \\ k=3}}{6} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=4}}{6} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=5}}{6} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=6}}{6} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=7}}{6} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=8}}{6} = 6 \cdot (8-3+1) = 36$$

$$\textit{für} \quad k=3 \quad k=4 \quad k=5 \quad k=6 \quad k=7 \quad k=8$$

Übungen:

I.) Darstellung der Summanden

1.) $\sum_{i=1}^{5} i^3$ 2.) $\sum_{i=2}^{7} (2-i)$ 3.) $\sum_{i=0}^{4} (i+1)^2$

4.) $\sum_{i=3}^{8} \left(10-\frac{i}{2}\right)$ 5.) $\sum_{i=2}^{6} (-i)^i$ 6.) $\sum_{i=0}^{5} \frac{i}{i+2}$

II.) Grenzen ermitteln

1.) $\sum \frac{1}{i} \quad = \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{10}$

2.) $\sum \frac{2^i}{3} \quad = \quad \frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+...+\frac{4.096}{3}$

3.) $\sum (-1)^i \cdot i^2 \quad = \quad (-9)+16-25+...+324$

4.) $\sum \left(4i^2-i\right) \quad = \quad 14+33+60+96+...+1.580$

III.) Bildungsgesetze

1.) $0+3+6+9+12+...+30$

2.) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+...+\frac{20}{21}$

3.) Summe aller durch 5 teilbaren Zahlen zwischen 0 und 4.000.

4.) $(-1)+2-3+4-5+6-7+8$

5.) $10+5+\frac{10}{3}+\frac{5}{2}+2+\frac{5}{3}+\frac{10}{7}+...+\frac{10}{111}$

6.) $0+1+4+9+16+25+...+400$

IV.) Rechengesetze: Zerlegung in Einzelsummen

1.) $\sum_{i=1}^{10}\left(4i^3-6i\right)$

2.) $\sum_{i=1}^{5}\left(2i^2+3\right)$

3.) $\sum_{i=1}^{6}\left(8i^2+4i-2\right)$

4.) $\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{1}{2}i^3+6i^2\right)$

V.) Rechengesetze: Indexverschiebung

1.) $\sum_{i=6}^{10}\left(i-1\right) = \sum_{i=1}^{?} ?$

2.) $\sum_{i=4}^{10}\left(i+4\right) = \sum_{i=?}^{8} ?$

3.) $\sum_{i=5}^{10}\left(8-i\right) = \sum_{i=1}^{?} ?$

4.) $\sum_{i=2}^{8}\left(3-i\right) = \sum_{i=?}^{6} ?$

5.) $\sum_{i=3}^{15}\left(2i+3\right) = \sum_{i=1}^{?} ?$

6.) $\sum_{i=4}^{10}\left(i^2-2\right) = \sum_{i=1}^{?} ?$

7.) $\sum_{i=5}^{20}\left(i^2+2i\right) = \sum_{i=?}^{17} ?$

8.) $\sum_{i=4}^{10}\left(4i-3\right) = \sum_{i=?}^{7} ?$

9.) $\sum_{i=6}^{15}\left(2i^2-4i+2\right) = \sum_{i=?}^{10} ?$

10.) $\sum_{i=5}^{10}\left(6i+2\right) = \sum_{i=0}^{?} ?$

Rechengesetze und Formeln zum Summenzeichen:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \quad = \quad a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n \quad mit \;\; n \geq m \quad und \;\; m,n \in Z$$

Rechenregeln:

1.) Abspalten von Teilsummen: $\sum_{i=m}^{n+1} a_i \quad = \quad \left(\sum_{i=m}^{n} a_i \right) + a_{n+1}$

2.) Sonderfall 1: m = n (Untergrenze = Obergrenze) $\sum_{i=m}^{m} a_i \quad = \quad a_m$

3.) Sonderfall 2: m > n (Untergrenze > Obergrenze) $\sum_{i=1}^{0} a_i \quad \overset{Def.}{=} \quad 0$

4.) Zerlegung in Teilsummen: $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + b_i \right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

5.) Multiplikation mit einer Konstanten: $\sum_{i=1}^{n} \left(c \cdot a_i \right) \quad = \quad c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$

6.) Addition einer Konstanten: $\sum_{i=m}^{n} c \quad = \quad (n - m + 1) \cdot c$

7.) Indexverschiebung $\sum_{i=m}^{n} a_i \quad = \quad \sum_{i=m+c}^{n+c} a_{i-c} \quad = \quad \sum_{i=m-c}^{n-c} a_{i+c}$

Potenzsummen

1.) Summe der ersten n Zahlen:

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad = \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad = \quad \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

2.) Summe der ersten n Quadratzahlen:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad = \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad = \quad \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

3.) Summe der ersten n^3 Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \quad = \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \quad = \quad \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

Rechengesetze und Formeln zum Summenzeichen:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n \quad mit \;\; n \geq m \quad und \;\; m,n \in Z$$

Rechenregeln:

1.) Abspalten von Teilsummen: $\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$

2.) Sonderfall 1: m = n (Untergrenze = Obergrenze) $\sum_{i=m}^{m} a_i = a_m$

3.) Sonderfall 2: m > n (Untergrenze > Obergrenze) $\sum_{i=1}^{0} a_i \overset{Def.}{=} 0$

4.) Zerlegung in Teilsummen: $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

5.) Multiplikation mit einer Konstanten: $\sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$

6.) Addition einer Konstanten: $\sum_{i=m}^{n} c = (n-m+1) \cdot c$

7.) Indexverschiebung $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+c}^{n+c} a_{i-c} = \sum_{i=m-c}^{n-c} a_{i+c}$

Potenzsummen

1.) Summe der ersten n Zahlen:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

2.) Summe der ersten n Quadratzahlen:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

3.) Summe der ersten n^3 Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$