

Summenzeichen Σ

Das Summenzeichen Σ (Sigma aus dem griechischen Alphabet) mit einem Laufindex kürzt im Wesentlichen eine algebraische Summe mit einer großen Anzahl von Summanden ab. *Damit spart man sich viel Schreibarbeit.*

Bezeichnungen am Summenzeichen:

Beispiel:	a: Summationsvariable
$\sum_{i=1}^{18} a_i$	i: Laufindex; nimmt hier die Werte von 1 bis 18 in aufsteigender Form nacheinander an
	1: untere Grenze; 18: obere Grenze

Die Wahl zur Bezeichnung des Laufindex ist nicht von Bedeutung. Gewöhnlich werden hierfür verschiedene Buchstaben des Alphabets verwendet.

Beispiel 1:

Die Summe $S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 32 + 34 + 36$ soll unter Verwendung des Summenzeichens geschrieben werden.

Jeder Summand ist hier durch 2 teilbar und man kann die Summe auch als

$$S = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + \dots + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 18$$

schreiben. Da die 2 immer auftaucht, ist sie eine Konstante in dieser Summe.

Der Laufindex i dieser Summe nimmt die Werte von 1 bis 18 an.

Somit kann man verkürzt schreiben:

$S = \sum_{i=1}^{18} 2i$	Konstante	$=$	$2 \sum_{i=1}^{18} i$
	=	ausklammern	

Oft wird das Ergebnis einer Summe gesucht, wobei nur die abgekürzte Summenform gegeben ist.

Ziel ist, die Summe mit Summanden darzustellen und zu berechnen.

Beispiel 2:

Hier werden die Zahlen 1 bis 5 für den Laufindex i eingesetzt

$$\sum_{i=1}^5 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

für $i=1$ $i=2$ $i=3$ $i=4$ $i=5$

Beispiel 3:

Da der Laufindex k als Hochzahl verwendet wird, variiert nun die Potenz der Zahl 4 von 0 bis 3.

$$\sum_{k=0}^3 4^k = 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3$$

↑ ↑ ↑ ↑

für $k=0$ $k=1$ $k=2$ $k=3$

Beispiel 4:

Wie man hier erkennt, fehlt der Laufindex und man hat nur eine Konstante. In diesem Fall kann die Konstante 6 mit der Zahl 5 multipliziert werden.

$$\sum_{k=1}^5 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 6 \cdot 5 = 30$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

für $k=1$ $k=2$ $k=3$ $k=4$ $k=5$

Sollte die Untergrenze allerdings nicht bei 1 beginnen, so muss die Summe wie folgt berechnet werden:

Konstante * (Obergrenze - Untergrenze + 1)

$$\sum_{k=3}^8 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 6 \cdot (8-3+1) = 36$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

für $k=3$ $k=4$ $k=5$ $k=6$ $k=7$ $k=8$

Übungen:

I.) Darstellung der Summanden

$$\begin{array}{lll} 1.) \sum_{i=1}^5 i^3 & 2.) \sum_{i=2}^7 (2-i) & 3.) \sum_{i=0}^4 (i+1)^2 \\ 4.) \sum_{i=3}^8 \left(10 - \frac{i}{2}\right) & 5.) \sum_{i=2}^6 (-i)^i & 6.) \sum_{i=0}^5 \frac{i}{i+2} \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{l} 1.) \sum_{i=1}^5 i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 \\ 2.) \sum_{i=2}^7 (2-i) = 0 + (-1) + (-2) + (-3) + (-4) + (-5) = -1 - 2 - 3 - 4 - 5 \\ 3.) \sum_{i=0}^4 (i+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 \\ 4.) \sum_{i=3}^8 \left(10 - \frac{i}{2}\right) = 8,5 + 8 + 7,5 + 7 + 6,5 + 6 \\ 5.) \sum_{i=2}^6 (-i)^i = 2^2 - 3^3 + 4^4 - 5^5 + 6^6 \\ 6.) \sum_{i=0}^5 \frac{i}{i+2} = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} + \frac{5}{7} = 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{5}{7} \end{array}$$

II.) Grenzen ermitteln

$$\begin{array}{l} 1.) \sum \frac{1}{i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{10} \\ 2.) \sum \frac{2^i}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{4.096}{3} \\ 3.) \sum (-1)^i \cdot i^2 = (-9) + 16 - 25 + \dots + 324 \\ 4.) \sum (4i^2 - i) = 14 + 33 + 60 + 96 + \dots + 1.580 \end{array}$$

Lösung:

$$1.) \quad \sum \frac{1}{i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{10} = \sum_{i=3}^{10} \frac{1}{i}$$

$$2.) \quad \sum \frac{2^i}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{4.096}{3} = \sum_{i=0}^{12} \frac{2^i}{3}$$

$$3.) \quad \sum (-1)^i \cdot i^2 = (-9) + 16 - 25 + \dots + 324 = \sum_{i=3}^{18} (-1)^i \cdot i^2$$

$$4.) \quad \sum (4i^2 - i) = 14 + 33 + 60 + 96 + \dots + 1.580 = \sum_{i=2}^{20} (4i^2 - i)$$

III.) Bildungsgesetze

$$1.) \quad 0 + 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 30$$

$$2.) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{20}{21}$$

3.) Summe aller durch 5 teilbaren Zahlen zwischen 0 und 4.000.

$$4.) \quad (-1) + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8$$

$$5.) \quad 10 + 5 + \frac{10}{3} + \frac{5}{2} + 2 + \frac{5}{3} + \frac{10}{7} + \dots + \frac{10}{111}$$

$$6.) \quad 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots + 400$$

Lösung:

$$1.) \quad 0 + 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 30 = \sum_{i=0}^{10} 3i$$

$$2.) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{20}{21} = \sum_{i=1}^{20} \frac{i}{i+1}$$

$$3.) \quad \text{Summe aller durch 5 teilbaren Zahlen zwischen 0 und 4.000.} \Rightarrow \sum_{i=0}^{800} 5i$$

$$4.) \quad (-1) + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 = \sum_{i=1}^8 (-1)^i \cdot i$$

$$5.) \quad 10 + 5 + \frac{10}{3} + \frac{5}{2} + 2 + \frac{5}{3} + \frac{10}{7} + \dots + \frac{10}{111} = \sum_{i=1}^{111} \frac{10}{i}$$

$$6.) \quad 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots + 400 = \sum_{i=0}^{20} i^2$$

IV.) Rechengesetze: Zerlegung in Einzelsummen

$$1.) \sum_{i=1}^{10} (4i^3 - 6i)$$

$$2.) \sum_{i=1}^5 (2i^2 + 3)$$

$$3.) \sum_{i=1}^6 (8i^2 + 4i - 2)$$

$$4.) \sum_{i=1}^8 \left(\frac{1}{2}i^3 + 6i^2 \right)$$

Lösung:

$$1.) \sum_{i=1}^{10} (4i^3 - 6i) = 4 \sum_{i=1}^{10} i^3 - 6 \sum_{i=1}^{10} i = 4 \cdot \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} - 6 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 11.770$$

$$2.) \sum_{i=1}^5 (2i^2 + 3) = 2 \sum_{i=1}^5 i^2 + \sum_{i=1}^5 3 = 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + 5 \cdot 3 = 125$$

3.)

$$\sum_{i=1}^6 (8i^2 + 4i - 2) = 8 \sum_{i=1}^6 i^2 + 4 \sum_{i=1}^6 i - \sum_{i=1}^6 2 = 8 \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} + 4 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} - 6 \cdot 2 = 800$$

$$4.) \sum_{i=1}^8 \left(\frac{1}{2}i^3 + 6i^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 i^3 + 6 \sum_{i=1}^8 i^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8^2 \cdot 9^2}{4} + 6 \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 1872$$

V.) Rechengesetze: Indexverschiebung

$$1.) \sum_{i=6}^{10} (i-1) = \sum_{i=1}^? ?$$

$$2.) \sum_{i=4}^{10} (i+4) = \sum_{i=?}^8 ?$$

$$3.) \sum_{i=5}^{10} (8-i) = \sum_{i=1}^? ?$$

$$4.) \sum_{i=2}^8 (3-i) = \sum_{i=?}^6 ?$$

$$5.) \sum_{i=3}^{15} (2i+3) = \sum_{i=1}^? ?$$

$$6.) \sum_{i=4}^{10} (i^2 - 2) = \sum_{i=1}^? ?$$

$$7.) \sum_{i=5}^{20} (i^2 + 2i) = \sum_{i=?}^{17} ?$$

$$8.) \sum_{i=4}^{10} (4i-3) = \sum_{i=?}^7 ?$$

$$9.) \sum_{i=6}^{15} (2i^2 - 4i + 2) = \sum_{i=?}^{10} ? \quad 10.) \sum_{i=5}^{10} (6i + 2) = \sum_{i=0}^{?} ?$$

Lösung:

$$1.) \sum_{i=6}^{10} (i-1) = \sum_{i=1}^5 [(i+5)-1] = \sum_{i=1}^5 (i+4)$$

$$2.) \sum_{i=4}^{10} (i+4) = \sum_{i=2}^8 [(i+2)+4] = \sum_{i=2}^8 (i+6)$$

$$3.) \sum_{i=5}^{10} (8-i) = \sum_{i=1}^6 8-(i+4) = \sum_{i=1}^6 (4-i)$$

$$4.) \sum_{i=2}^8 (3-i) = \sum_{i=0}^6 3-(i+2) = \sum_{i=0}^6 (1-i)$$

$$5.) \sum_{i=3}^{15} (2i+3) = \sum_{i=1}^{13} [2(i+2)+3] = \sum_{i=1}^{13} (2i+7)$$

$$6.) \sum_{i=4}^{10} (i^2 - 2) = \sum_{i=1}^7 [(i+3)^2 - 2] = \sum_{i=1}^7 (i^2 + 6i + 7)$$

$$7.) \sum_{i=5}^{20} (i^2 + 2i) = \sum_{i=2}^{17} [(i+3)^2 + 2(i+3)] = \sum_{i=2}^{17} (i^2 + 8i + 15)$$

$$8.) \sum_{i=4}^{10} (4i-3) = \sum_{i=1}^7 [4(i+3)-3] = \sum_{i=1}^7 (4i+9)$$

$$9.) \sum_{i=6}^{15} (2i^2 - 4i + 2) = \sum_{i=1}^{10} [2(i+5)^2 - 4(i+5) + 2] = \sum_{i=1}^{10} (2i^2 + 16i + 32)$$

$$10.) \sum_{i=5}^{10} (6i+2) = \sum_{i=0}^5 [6(i+5)+2] = \sum_{i=0}^5 (6i+32)$$

Rechengesetze und Formeln zum Summenzeichen:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n \quad \text{mit } n \geq m \quad \text{und } m, n \in \mathbb{Z}$$

Rechenregeln:

- 1.) Abspalten von Teilsummen:
$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=m}^n a_i \right) + a_{n+1}$$
- 2.) Sonderfall 1: $m = n$ (Untergrenze = Obergrenze)
$$\sum_{i=m}^m a_i = a_m$$
- 3.) Sonderfall 2: $m > n$ (Untergrenze > Obergrenze)
$$\sum_{i=1}^0 a_i \stackrel{\text{Def.}}{=} 0$$
- 4.) Zerlegung in Teilsummen:
$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$
- 5.) Multiplikation mit einer Konstanten:
$$\sum_{i=1}^n (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i$$
- 6.) Addition einer Konstanten:
$$\sum_{i=m}^n c = (n - m + 1) \cdot c$$
- 7.) Indexverschiebung
$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m+c}^{n+c} a_{i-c} = \sum_{i=m-c}^{n-c} a_{i+c}$$

Potenzsummen

1.) Summe der ersten n Zahlen:

$$\sum_{k=1}^n k = 1+2+3+\dots+n$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

2.) Summe der ersten n Quadratzahlen:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

3.) Summe der ersten n³ Zahlen

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

Rechengesetze und Formeln zum Summenzeichen:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n \quad \text{mit } n \geq m \quad \text{und } m, n \in \mathbb{Z}$$

Rechenregeln:

1.) Abspalten von Teilsummen:

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=m}^n a_i \right) + a_{n+1}$$

2.) Sonderfall 1: m = n (Untergrenze = Obergrenze)

$$\sum_{i=m}^m a_i = a_m$$

3.) Sonderfall 2: m > n (Untergrenze > Obergrenze)

$$\sum_{i=1}^0 a_i \stackrel{\text{Def.}}{=} 0$$

4.) Zerlegung in Teilsummen:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

5.) Multiplikation mit einer Konstanten:

$$\sum_{i=1}^n (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i$$

6.) Addition einer Konstanten:

$$\sum_{i=m}^n c = (n - m + 1) \cdot c$$

7.) Indexverschiebung

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m+c}^{n+c} a_{i-c} = \sum_{i=m-c}^{n-c} a_{i+c}$$

Potenzsummen

1.) Summe der ersten n Zahlen:

$$\sum_{k=1}^n k = 1+2+3+\dots+n$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

2.) Summe der ersten n Quadratzahlen:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

3.) Summe der ersten n^3 Zahlen

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$