13. Jgst. Klasse: BGY18 Name:	3. Klausur Fach: Mathematik / Leistungsfach Rohpunkte: **180**	KA3_LKM 13/2 Pi/Mei Datum: 02.03.2021 Notenpunkte:

Notieren Sie sämtliche Ansätze und Nebenrechnungen auf Ihren Bearbeitungsblättern! Nummerieren Sie alle Seiten! Geben Sie Ihre Blätter in einer sinnvollen Ordnung ab!

Aufgabe 1: Analysis – e-Funktionen 60 [Teilaufgabe je 4 Pkte.; Nr. 4 und 5: 6 Pkte.]

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -e^x$

(1) Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich der Funktion.

Lösung: $D = \mathbb{R}$

(2) Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f in dessen Schnittpunkt mit der y-Achse.

Lösung:

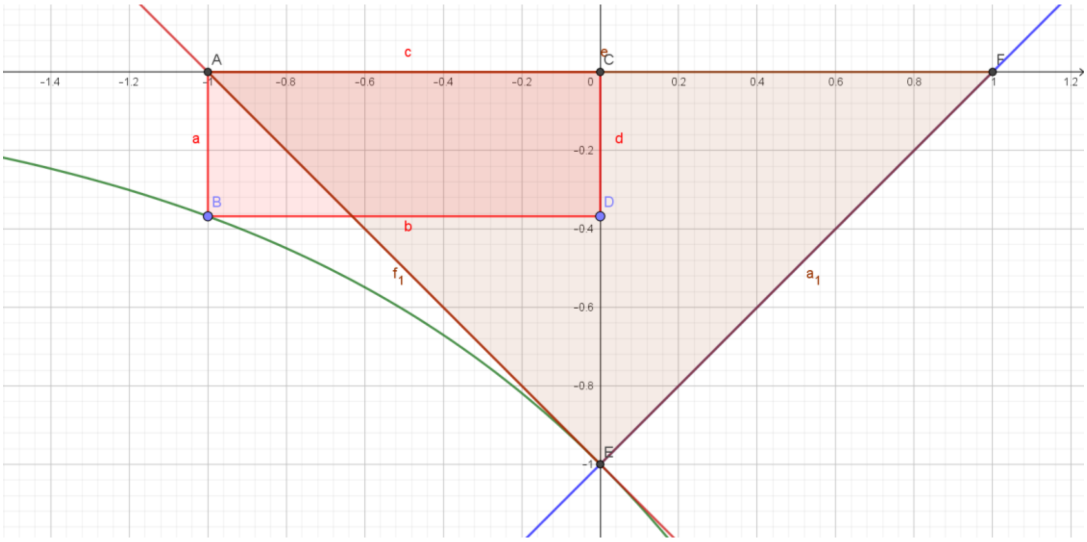
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -e^x \xrightarrow{x=0} f(0) = -e^0 = -1 \\ f'(x) = -e^x \xrightarrow{x=0} f'(0) = -e^0 = -1 = m \end{array}\right\} Tangente: \quad y = -x - 1$$

(3) Geben Sie eine Gleichung der Gerade an, die in diesem Punkt (S_y) senkrecht zur Tangente steht.

Lösung: $Orthogonalitätsbedingung: \quad m_t \cdot m_n = -1 \quad \rightarrow \quad m_n = 1 \quad \rightarrow \quad Normale: \quad y = x - 1$

(4) Zeichen Sie den Graphen der Funktion f(x), die Tangente (2) und die Geradengleichung (3) in ein Koordinatensystem.
Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die von dieser Gerade (3), der Tangente (2) und der x-Achse eingeschlossen wird

Lösung: $Fläche: \quad A_\Delta = \frac{1}{2} g \cdot h = \frac{1}{2}[1-(-1)] \cdot |-1| = 1[FE]$



(5) Betrachtet werden Rechtecke mit den Eckpunkten

$$\left(t \mid 0\right),\left(0 \mid 0\right),\left(0 \mid f\left(t\right)\right) \mathit{und} \left(t \mid f\left(t\right)\right) \quad \mathit{für}\ t \in \left]-3\,;0\right[$$

Es gibt einen Wert des Parameters t, für den der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks maximal ist. Bestimmen Sie diesen Wert

Lösung:

$$f\left(x\right)=-e^{x}$$

$$\mathit{Eckpunkte}:\quad \left(t \mid 0\right),\left(0 \mid 0\right),\left(0 \mid -e^{t}\right) \mathit{und} \left(t \mid -e^{t}\right) \quad \mathit{für}\ t \in \left]-3\,;0\right[$$

$$\mathit{Breite}:\quad \Delta x=\left(0-t\right)=-t \qquad \mathit{Höhe}:\quad \Delta y=\left[0-\left(-e^{t}\right)\right]=e^{t}$$

$$\mathit{Flächenfunktion}:\quad A\left(t\right) = -t\cdot e^{t} \xrightarrow{t=-1} A\left(t\right) = -\left(-1\right)\cdot e^{\left(-1\right)} = \frac{1}{e}\approx 0{,}368$$

$$\mathit{Berechnung}:\quad A'\left(t\right) = -1\cdot e^{t}+\left(-t\right)\cdot e^{t}=\left(-1-t\right)\cdot e^{t}=0 \rightarrow t=-1$$

$$A''\left(t\right) = \left(-1\right)\cdot e^{t}+\left(-1-t\right)\cdot e^{t}=\left(-2-t\right)\cdot e^{t}$$

$$A''\left(-1\right) = \left(-2+1\right)\cdot e^{-1}=-\frac{1}{e}<0 \rightarrow rel.Max\left(-1 \,\middle|\, \frac{1}{e}\right)$$

$$\mathit{Randwerte}:\quad \lim_{t\to 0}A\left(t\right)=\lim_{t\to 0}\left(-t\cdot e^{t}\right)\rightarrow 0 \quad \mathit{und} \quad \lim_{t\to(-3)^{+}}A\left(t\right)=\lim_{t\to(-3)^{+}}\left(-t\cdot e^{t}\right)\rightarrow \frac{3}{e^{3}}\approx 0{,}149$$

Gegeben ist außerdem die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto -e^{x-1}+4$

(6) Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von f erzeugt werden kann.

Lösung:

Der Graph von h kann aus dem Graphen von g durch eine Verschiebung um 1 in positive x-Richtung und eine Verschiebung um 4 in positive y-Richtung erzeugt werden

(7) Geben Sie das Verhalten von $h: x \mapsto -e^{x-1}+4$ für $x\to\infty\ \mathit{und}\ x\to-\infty$ an.

Lösung:

$$\lim_{x\to\infty}h\left(x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-e^{x-1}\right)+4 = 4-\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{e} \rightarrow 4-\text{"}\infty\text{"} \rightarrow \text{"}-\infty\text{"}$$

$$\lim_{x\to-\infty}h\left(x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-e^{x-1}\right)+4 = 4-\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}}{e} = 4-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x}\cdot e} \rightarrow 4-\text{"}0\text{"} \rightarrow 4$$

(8) Begründen Sie (durch Berechnen), dass sich die Graphen von f und h **<u>nicht schneiden.</u>**

Lösung:

$$\mathit{Indirekter\ Beweis}\left(\mathit{Widerspruch}\right)$$

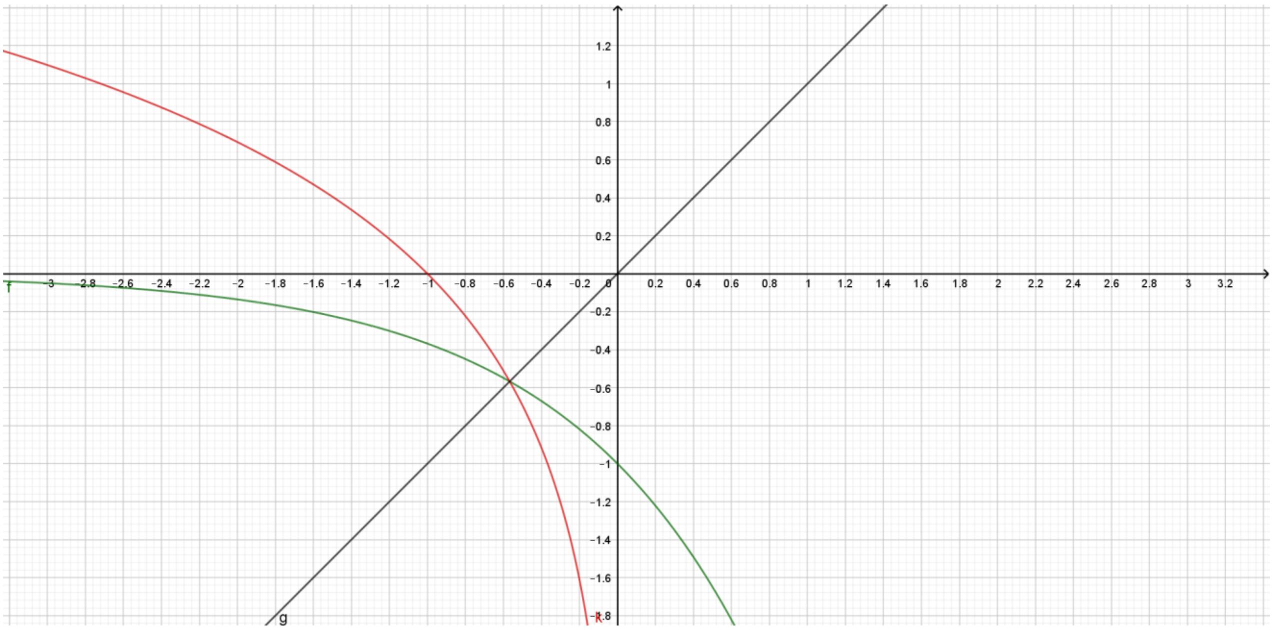
$$f\left(x\right)=h\left(x\right) \rightarrow -e^{x}=-e^{x-1}+4 \xrightarrow{+e^{x-1}} e^{x-1}-e^{x}=4 \rightarrow \frac{1}{e}e^{x}-e^{x}=4$$

$$\rightarrow e^{x}\left(\frac{1}{e}-1\right)=4 \rightarrow e^{x}=\frac{4}{\frac{1-e}{e}} \rightarrow e^{x}=\frac{4e}{1-e} \xrightarrow[\substack{1-e<0\\4e>0}]{\mathit{keine\ Lösung}} \frac{4e}{1-e}<0$$

Die **Umkehrfunktion von f wird mit k** bezeichnet.
Die Abbildung stellt die Graphen der Funktionen f und k bei gleicher Skalierung der Koordinatenachsen dar. Die x-Achse ist bereits eingezeichnet.

(9) Ergänzen Sie die y-Achse und die **Gerade w** mit der Gleichung y = x in Anlage 1.
Welche Aufgabe besitzt die Gerade w hinsichtlich der Darstellung?

Lösung: Spiegelgerade



(10) Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift der Funktion k(x).

Lösung:

$$f(x) = -e^x \rightarrow y = -e^x \quad \rightarrow \quad x = -e^y \quad \rightarrow \quad -x = e^y \quad \rightarrow \quad \ln(-x) = y = k(x) \quad mit \quad x < 0$$

(11) Begründen Sie (ohne zu rechnen), dass jede Tangente mit der Steigung $m = (-1)$ an den Graphen von f auch Tangente an den Graphen von k ist.

Lösung:
Die Graphen von f und k liegen bezüglich der Gerade w mit der Gleichung y = x zueinander symmetrisch. Da jede Gerade mit der Steigung symmetrisch bezüglich w ist, berührt sie, wenn sie den Graphen von f berührt, auch den Graphen von k.

Betrachtet werden nun die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierten Funktionen

$$g : x \mapsto \frac{1}{x} \quad und \quad u : x \mapsto f(g(x))$$

(12) Geben Sie für u(x) einen Funktionsterm an, der zwar die Variable x aber nicht die Funktionsbezeichnungen f und g enthält.

Lösung: $g : x \mapsto \frac{1}{x} \quad und \quad f(g(x)) = -e^{g(x)} \quad \rightarrow \quad u(x) = f(g(x)) = -e^{\frac{1}{x}}$

(13) Zeigen Sie, dass die 1. Ableitung der Funktion $u: x \mapsto f\left(g\left(x\right)\right)$ folgende Form

annehmen kann: $u'\left(x\right) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$ **und**

erläutern Sie, die folgende Darstellung: $u'\left(x\right) = f'\left(g\left(x\right)\right) \cdot g'\left(x\right)$

Lösung:

$$u\left(x\right) = -e^{\frac{1}{x}} = -e^{x^{-1}} \quad \rightarrow \quad u'\left(x\right) = -e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-1\right) x^{-2} = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$\textit{Anwendung der Kettenregel}: \quad u'\left(x\right) = f'\left(g\left(x\right)\right) \cdot g'\left(x\right)$$

(14) Begründen Sie, warum u(x) keinen Extremwert besitzt.

Lösung:

$$u'\left(x\right) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \xrightarrow[\textit{Nullprodukt}]{e^{\frac{1}{x}} \neq 0} \quad \frac{1}{x^2} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \textit{notwendige Bedingung nicht erfüllt}$$

Aufgabe 2: Stochastik	60 [16 – 44]

Teil 1: Bedingte und Totale W'keit & Satz von Bayes

Ein Familienunternehmen besitzt drei unterschiedlich alte Maschinen A, B und C, die alle das gleiche Gut produzieren. Sie stellen am Tag 5.000, 12.000 bzw. 33.000 Stück her, wobei die Ausschussquoten 2%, 1% bzw. 5 % betragen.

a) Mit welcher WS ist ein beliebig gewähltes Gut dieses Unternehmens ok?

Lösung:

$$P\left("ok"\right) \quad = \quad \frac{5.000}{50.000} \cdot 0{,}98 + \frac{12.000}{50.000} \cdot 0{,}99 + \frac{33.000}{50.000} \cdot 0{,}95 \quad = \quad 0{,}9626$$

b) Mit welcher WS stammt ein defektes Gut aus der Produktion von Maschine B?

Lösung:

$$P\left("defekt"\right) \quad = \quad 0{,}0374$$

$$\rightarrow \quad P_{"defekt"}\left("B"\right) \quad = \quad \frac{0{,}24 \cdot 0{,}01}{0{,}0374} \quad = \quad \frac{0{,}0024}{0{,}0374} \quad = \quad 0{,}0642$$

c) Mit welcher WS wurde ein beliebig der Produktion entnommenes fehlerfreies Gut von Maschine A hergestellt?

Lösung:

$$P_{"ok"}\left("A"\right) \quad = \quad \frac{0{,}1 \cdot 0{,}98}{0{,}9626} \quad = \quad \frac{0{,}098}{0{,}9626} \quad = \quad 0{,}1018$$

Teil 2: BV & Baumdiagramm

Ein Blumenhändler gibt für seine seltene Pflanze eine Keimgarantie von 80 %.
Ein Kunde bestellt 25 Blumenzwiebeln.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit keimen

a) alle 25 Blumenzwiebeln?

Lösung: $B_{25;0,8}(X=25) = \binom{25}{25} 0,8^{25} \cdot 0,2^{0} = 0,00378 \approx 0,378\,[\%]$

b) mindestens 20 Blumenzwiebeln?

Lösung: $B_{25;0,8}(X \geq 20) = 1 - B(X \leq 19) = 1 - (1 - 0,617) = 0,617 \approx 61,7\,[\%]$

c) höchstens 10 Blumenzwiebeln?

Lösung: $B_{25;0,8}(X \leq 10) = 0$

d) Mehr als 7 und weniger als 15 Blumenzwiebeln?

Lösung:

$$B_{25;0,8}(7 < X < 15) = B(X \leq 14) - B(X \leq 7)$$

$$B_{25;0,8}(7 < X < 15) = (1 - 0,9944) - (1 - 1) = 0,0056$$

e) Wie viele Blumenzwiebeln muss Rudi Rettich kaufen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9 % mindestens **eine** keimende Pflanze erwarten darf?

Lösung:

$$B_{n;0,8}(X \geq 1) = 1 - B_{n;0,8}(X = 0) \geq 0,999$$

$$\rightarrow 0,2^{n} \leq 0,001 \rightarrow n \geq 4,3 \rightarrow n \geq 5$$

f) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der keimenden Blumenzwiebeln.

Lösung: $\mu = 25 \cdot 0,8 = 20 \rightarrow \sigma = \sqrt{20 \cdot 0,2} = 2$

g) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des Sigma-Intervalls.

Lösung:

$$B_{25;0,8}(18 \leq X \leq 22) = B(X \leq 22) - B(X \leq 17) = 0,9018 - 0,1091 = 0,7927$$

h) Bestimmen Sie die **symmetrischen** Intervallgrenzen für ein Intervall mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %

Lösung:

$Ansatz:$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) = P(|X - \mu| \leq 1,64\sigma) = 0,90$$

$$P(|X - 20| \leq 1,64 \cdot 2) = 0,90 \rightarrow P(|X - 20| \leq 3,28) = 0,90$$

$$\rightarrow P(16,72 \leq X \leq 23,28) \rightarrow P(17 \leq X \leq 23) = 0,9258$$

i) Wie groß ist die Keimgarantie p tatsächlich, wenn die Standardabweichung bei 2,5 liegt?

Lösung:

$$\sigma^2 = n\cdot p\cdot(1-p) = 6{,}25 \xrightarrow{n=25} p\cdot(1-p) = 0{,}25$$

$$\rightarrow -p^2+p-0{,}25 = 0 \rightarrow p = 0{,}5$$

k) In einem Korb sind 21 Blumenzwiebeln vom Typ A und weitere Blumenzwiebeln vom Typ B. Zieht man blind ohne Zurücklegen zwei Blumenzwiebeln aus dem Korb, so beträgt die WS, zweimal denselben Typ zu ziehen, 50 %.
Wie viele Blumenzwiebeln sind insgesamt im Korb?

Lösung: => Baumdiagramm

$$P(\text{"}AA\text{"}\cup\text{"}BB\text{"}) = P(\text{"}AA\text{"})+P(\text{"}BB\text{"})$$

$$P(\text{"}AA\text{"})+P(\text{"}BB\text{"}) = \frac{21}{21+x}\cdot\frac{20}{20+x}+\frac{x}{21+x}\cdot\frac{x-1}{20+x} = 0{,}5$$

$$\rightarrow 420+x^2-x = 210+20{,}5x+0{,}5x^2 \rightarrow 0{,}5x^2-21{,}5x+210 = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 28 \quad\vee\quad x_2 = 15 \rightarrow \text{Entweder 15 oder 28 Blumenzwiebeln vom Typ B}$$

Aufgabe 3: Determinanten und Lösungsverhalten von LGS	20 [4 – 10 – 6]

Gegeben sind für $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ die Matrix $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 0\\ 1 & t+2 & t\\ 0 & 1 & 2t\end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{d}_t = \begin{pmatrix} 2t+1\\ 4t\\ 1-2t\end{pmatrix}$

a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_1\cdot\vec{x} = \vec{d}_1$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ 4\\ -1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

b) Für welche t ist das Gleichungssystem $A_t\cdot\vec{x} = \vec{d}_t$
unlösbar, mehrdeutig lösbar, eindeutig lösbar?

Lösung:

$$Det\begin{pmatrix} t & 1 & 0\\ 1 & t+2 & t\\ 0 & 1 & 2t\end{pmatrix} \overset{Sarrus}{=} 2t^2(t+2)+0+0-0-t^2-2t = t(2t^2+3t-2)$$

$$\rightarrow t(2t^2+3t-2) = 0 \rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = -2 \quad t_3 = 0{,}5$$

$$\textit{eindeutig lösbar}: \ t\in\mathbb{R}\setminus\{-2;0;0{,}5\} \quad \textit{mehrdeutig lösbar}: \ t = 0 \quad \textit{unlösbar}: \ t\in\{-2;0{,}5\}$$

Probe $mit\ t=-2$

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{array} \quad ii \leftrightarrow i \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -8 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{array} \quad ii+2i$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|cl} 1 & 0 & -2 & -8 & \\ 0 & 1 & -4 & -19 & \\ 0 & 1 & -4 & 5 & iii-ii \end{array} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right\} unlösbar$$

Probe $mit\ t=0$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} y=1 \\ x=-2y=-2 \\ z=z \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \quad mit\ z \in \mathbb{R}$$

Probe $mit\ t=0,5$

$$\begin{array}{ccc|cl} 0,5 & 1 & 0 & 2 & 2i \\ 1 & 2,5 & 0,5 & 2 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 0 & 4 & \\ 1 & 2,5 & 0,5 & 2 & ii-i \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 0 & 4 & \\ 0 & 0,5 & 0,5 & -2 & 2ii \\ 0 & 1 & 1 & 0 & iii-2ii \end{array} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 0 & 4 & \\ 0 & 1 & 1 & -4 & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & iii-2ii \end{array}\right\} unlösbar$$

c) Berechnen Sie $\left(\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1\right)$.

Lösung:

$$\left(\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1^T\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1\right) \overset{\text{Ergebnis sofort ohne Berechung möglich, da}}{\underset{\mathbf{A}_1^T = \mathbf{A}_1}{=}} E$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \right]^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$NR: \quad Inverse$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \xrightarrow{adj.} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{VZ} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{Det}]{Trans} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$$

Von den nächsten beiden Aufgaben 4 und 5 bitte nur eine auswählen und bearbeiten!

Nur diese wird bewertet.

Tragen Sie hier die Aufgabennummer ein, die in die Wertung kommen soll:

Aufgabe 4: Übergangsmatrizen und statisches Gleichgewicht 40 [5 – 9 – 6 – 7 – 3 – 2 – 8]

In einem Reservat, das in drei Regionen A, B und C aufgeteilt ist, leben zu Anfang 3300 Zebras in Region A, 2000 in Region B und 1000 in Region C.

Das beobachtete jährliche Wanderverhalten wird als stabil angenommen und ist tabellarisch wie folgt darstellbar:

	A	B	C
A	a	$0{,}1$	$0{,}6x$
B	$3a$	$0{,}7$	$0{,}4x$
C	a	b	x

(1) Bestimmen Sie die Werte in der Übergangsmatrix.

Lösung:

	A	B	C
A	a	$0{,}1$	$0{,}6x$
B	$3a$	$0{,}7$	$0{,}4x$
C	a	b	x

$$\xrightarrow{Spaltensumme=1} U=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix}$$

(2) Welche Bestände an Zebras werden in den kommenden **drei Jahren** jeweils in den Regionen vorliegen?

Lösung:

$$\overset{1.\,Jahr}{\Rightarrow} \quad U\cdot\begin{pmatrix}3300\\2000\\1000\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3300\\2000\\1000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1160\\3580\\1560\end{pmatrix}$$

$$\overset{2.\,Jahr}{\Rightarrow} \quad U\cdot\begin{pmatrix}1160\\3580\\1560\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1160\\3580\\1560\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1058\\3514\\1728\end{pmatrix}$$

$$\overset{3.\,Jahr}{\Rightarrow} \quad U\cdot\begin{pmatrix}1058\\3514\\1728\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1058\\3514\\1728\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1081{,}4\\3440{,}2\\1778{,}4\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1082\\3440\\1778\end{pmatrix}$$

(3) Es wird versucht mittels der **gegebenen** Daten die regionale Verteilung der Zebras im Vorjahr zu bestimmen. Welche Schlussfolgerung würden Sie hier treffen?

Lösung:

$$U\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3300\\2000\\1000\end{pmatrix} \rightarrow b,c<0 \rightarrow keine\ Lösung$$

Schlussfolgerungen:

=> Übergangsmatrix wurde modifiziert / geändert

=> Neue Tiere wurden angesiedelt, daher Bestandsänderung

(4) Bestimmen Sie eine langfristige Prognose bezüglich der Verteilung der Tiere (= Anzahl) auf die Regionen.

Lösung:

$$\textit{Ansatz:}\quad (U-E)\cdot\vec{x}=\vec{0} \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & -0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{63}\begin{pmatrix} 11 \\ 34 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Verteilung der Tiere:}\quad \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1100 & 3400 & 1800 \end{pmatrix}$$

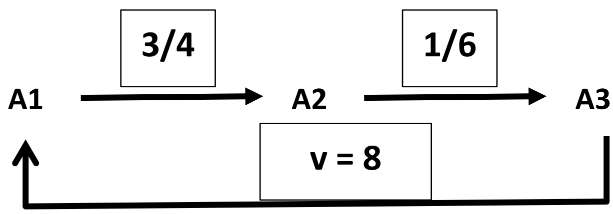
Bei den Zebras werden drei Altersstufen (Jungtiere A1, ausgewachsene Tiere A2 und Alttiere A3) unterschieden. Die Matrix

$$M_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{mit } v \geq 0$$

beschreibt die jährlichen Veränderungen einer Population dieser Tierart.

(5) Stellen Sie in einem Übergangsgraphen die Entwicklung dieser Population dar.

Lösung:



(6) Welche Bedeutung hat v für die Entwicklung der Population?

Lösung: **Aus den Alttieren erwachsen wieder v = 8 Jungtiere**

(7) Für welchen Wert von v stellt sich nach jeweils **drei Jahren** wieder eine beliebige Startpopulation ein? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Lösung:

$$\textit{Ansatz:}\quad \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot v=1 \quad\rightarrow\quad v=8$$

$$\textit{Nachweis:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Materialverflechtung	40 [6 – 10 – 8 – 4 – 6 – 6]

In einem Betrieb werden aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 die Bauteile B_1, B_2 und B_3 und aus diesen die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt.

Der Materialfluss ergibt sich aus den folgenden Tabellen, wobei die Rohstoffe in ME, die Bauteile und Endprodukte in Stück angegeben sind:

	B_1	B_2	B_3
R_1	2	4	4
R_2	1	3	5
R_3	2	4	8
R_4	5	1	3

	E_1	E_2	E_3
B_1	1	4	x
B_2	2	2	y
B_3	2	0	z

	E_1	E_2	E_3
R_1	…	…	…
R_2	…	…	16
R_3	…	…	26
R_4	…	…	22

Die Rohstoffkosten in € je ME betragen $\vec{k}_R = (20 \;\; 50 \;\; 30 \;\; 40)$,

die Fertigungskosten in € je Bauteil $\vec{k}_B = (180 \;\; 120 \;\; 200)$,

die Fertigungskosten in € je Endprodukt $\vec{k}_E = (670 \;\; 360 \;\; 620)$.

(1) Die obige unvollständige Tabelle M(RE) gibt an, wie viele ME der Rohstoffe R_2, R_3 und R_4 für ein Stück von E_3 benötigt werden
Berechnen Sie die Werte von x, y, z in der Bauteil-Endprodukt-Tabelle und die fehlenden Werte in der Rohstoff-Endprodukt-Tabelle.

Lösung:

$$M_{RB} \cdot M_{BE} = M_{RE} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & x \\ 2 & 2 & y \\ 2 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 2x+4y+4z \\ 17 & 10 & x+3y+5z \\ 26 & 16 & 2x+4y+8z \\ 13 & 22 & 5x+y+3z \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 18 & 16 & 18 \\ 17 & 10 & 16 \\ 26 & 16 & 26 \\ 13 & 22 & 22 \end{pmatrix}$$

(2) Im Lager befinden sich noch 100 ME von R_1, 80 ME von R_2 und je 50 Bauteile B_1 und B_2.
Wie viele ME der einzelnen Rohstoffe und wie viele Bauteile sind nach der Produktion von 10 Stück von E_1 und 12 Stück von E_2 im Lager, wenn alle vorhandenen Materialien verwendet werden?
Wie viele ME der einzelnen Rohstoffe müssen bestellt werden?
Hinweis: Von E_3 wird nichts produziert; von den Rohstoffen R_3 und R_4 haben wir keine Lagebestände –
daher wäre der erste Schritt $M_{BE} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 12 & 0 \end{pmatrix}^T$ ***sinnvoll*** 😉

Lösung:

Schritt 1: $M_{BE}\cdot\begin{pmatrix}10\\12\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&4&3\\2&2&1\\2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\12\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58\\44\\20\end{pmatrix}$

Schritt 2: Zusätzlicher Bedarf an Bauteilen aus den Rohstoffen zur Erledigung des Auftrags:

$$\rightarrow\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58\\44\\20\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{Weiterer}\\\text{Bedarf}}}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58-50\\44-50\\20-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\20\end{pmatrix}$$

$$M_{RB}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\R_3\\R_4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}18&16&18\\17&10&16\\26&16&26\\13&22&22\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\R_3\\R_4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\R_3\\R_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}96\\108\\176\\100\end{pmatrix}$$

$R_1 = 96$: Da 100 Rohstoffe R_1 auf Lager sind, bleiben noch 4 Rohstoffe R_1 übrig.

$R_2 = 108$: Da nur 80 Rohstoffe R_2 auf Lager sind, müssen 28 Rohstoffe R_2 bestellt werden.

$R_3 = 176$: Da über den Lagerbestand von R_3 nichts angegeben ist, geht man von 0 aus.
Daher müssen 176 Rohstoffe R_3 bestellt werden.

$R_4 = 100$: Wie bei R_3 geht man bei R_4 von Lagerbestand = 0 aus;
daher müssen 100 Rohstoffe R_4 bestellt werden.

Ein Kunde erteilt einen Auftrag über 5 Stück von E_1, 10 Stück von E_2 und 11 Stück von E_3.
Es fallen Fixkosten in Höhe von 5.500 € an.

(3) Bestimmen Sie die variablen Herstellkosten pro ME Endprodukt.

Lösung:

$$Hk_v=\overrightarrow{k_R}\cdot M_{RE}+\overrightarrow{k_B}\cdot M_{BE}+\overrightarrow{k_E}$$

$$Hk_v=\begin{pmatrix}20&50&30&40\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}18&16&18\\17&10&16\\26&16&26\\13&22&22\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}180&120&200\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4&3\\2&2&1\\2&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}670&360&620\end{pmatrix}$$

$$Hk_v=\begin{pmatrix}4000&3500&4500\end{pmatrix}$$

(4) Zeigen Sie, dass die Gesamtkosten 110.000 € betragen.

Lösung:

$$Gk = Hk_v \cdot \vec{e} + K_{fix}$$

$$\rightarrow \quad Gk = \begin{pmatrix} 4000 & 3500 & 4500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + 5500 = 104500 + 5500 = 110000$$

Die Stückpreise für die Endprodukte betragen

$$\overrightarrow{p_t} \quad = \quad \left(100t \;\middle|\; -\frac{1}{6}t^3 + \frac{2}{3}t^2 + 400t \;\middle|\; -\frac{1}{10}t^2 + 200t \right) \quad mit\ t \in \mathbb{R}$$

(5) Welchen Wert besitzt t für die Gewinnschwelle und für die Gewinngrenze?

Lösung:

$$Gewinnfunktion: \quad g(t) \quad = \quad \overrightarrow{p_t} \cdot \vec{e} - Gk$$

$$\rightarrow \quad g(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} 100t & -\frac{1}{6}t^3 + \frac{2}{3}t^2 + 400t & -\frac{1}{10}t^2 + 200t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} - 110000$$

$$\rightarrow \quad g(t) \quad = \quad \frac{1}{30}\left(-50t^3 + 167t^2 + 201000t\right) - 110000 \quad = \quad 0$$

$$\rightarrow \quad t_1 = 17{,}5\left[Gewinnschwelle\right] \quad \rightarrow \quad t_2 = 54{,}75\left[Gewinngrenze\right]$$

(6) Für welchen Wert von t, wird der Gesamtgewinn maximal?

Lösung:

$$Gewinnfunktion: \quad g(t) \quad = \quad \overrightarrow{p_t} \cdot \vec{e} - Gk$$

$$\rightarrow \quad g(t) \quad = \quad \frac{1}{30}\left(-50t^3 + 167t^2 + 201000t\right) - 110000$$

$$\rightarrow \quad g'(t) \quad = \quad \frac{1}{15}\left(-75t^2 + 167t + 100500\right) \quad = \quad 0$$

$$\rightarrow \quad t_1 = -35{,}51\left[nicht\ definiert\right] \quad \rightarrow \quad t_2 = 37{,}74$$

$$\rightarrow \quad g''(t) \quad = \quad \frac{1}{15}\left(-150t + 167\right) \quad \rightarrow \quad g''(37{,}74) \quad < \quad 0 \quad \rightarrow \quad Max$$