12. Jgst.	3. Test	Datum: 26.11.2019
Kurs M LK 2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Ableitungen (insgesamt); Exponentialfunktionen (inkl. Parameter)**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Exponentialgleichungen** **15**

Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen:

a) $e^{2x} - 6e^{x} + 10 = 2$ b) $10e^{4x} - 20 = 0$ c) $e^{2x} - 2 = \frac{15}{e^{2x}}$

Lösung:

$$e^{2x} - 6e^{x} + 10 = 2 \xrightarrow{u=e^x} u^2 - 6u + 8 = 0 \xrightarrow{Lsg-Formel} u_1 = 4 \quad und \quad u_2 = 2$$

$$\xrightarrow{u=e^x} u_1 = e^x = 4 \xrightarrow{\ln} x_1 = \ln 4 \quad und \quad u_2 = e^x = 2 \xrightarrow{\ln} x_2 = \ln 2$$

$$10e^{4x} - 20 = 0 \xrightarrow[:10]{+20} e^{4x} = 2 \xrightarrow{\ln} x = \frac{1}{4}\ln 2$$

$$e^{2x} - 2 = \frac{15}{e^{2x}} \xrightarrow[-15]{\cdot e^{2x}} e^{4x} - 2e^{2x} - 15 = 0 \xrightarrow{u=e^{2x}} u^2 - 2u - 15 = 0$$

$$\xrightarrow{Lsg-Formel} u_1 = 5 \quad und \quad u_2 = -3 \xrightarrow{u=e^x} u_1 = e^{2x} = 5$$

$$\xrightarrow{\ln} x_1 = \frac{1}{2}\ln 5 \quad und \quad u_2 = e^{2x} = -3\,[n.\,def.]$$

Aufgabe 2: Steigungen | 7 | |

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$f(x) = \frac{3x}{e^{2x}}$ an der Stelle x = 1.

Lösung:

$$f(x) = \frac{3x}{e^{2x}} \rightarrow f'(x) = \frac{3 \cdot e^{2x} - 3x \cdot e^{2x} \cdot 2}{e^{4x}} = \frac{3-6x}{e^{2x}}$$

$$f(1) = \frac{3}{e^2} \approx 0,406 \quad und \quad f'(1) = \frac{-3}{e^2} \approx -0,406 = m$$

$$\xrightarrow{Ermittlung y-Achsenabschnitt} \frac{3}{e^2} = \frac{-3}{e^2} \cdot 1 + b \rightarrow b = \frac{6}{e^2}$$

$$\rightarrow t(x) = -\frac{3}{e^2}x + \frac{6}{e^2} = -0,406x + 0,812$$

Aufgabe 3: Kurvenuntersuchung (innermathematisch) | 25 | |

Untersuchen Sie die Funktion $f_k(x) = \left(k - \frac{1}{2}x\right) \cdot e^x \quad mit\ k > 0$

a) Berechnen Sie Schnittstellen mit den Koordinatenachsen.

b) Ermitteln Sie die Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$.

c) Zeigen Sie, dass die 2. Ableitung folgende Form annehmen kann:

$$f_k''(x) = e^x \cdot \left(-1 + k - \frac{1}{2}x\right)$$

d) Wie lauten die Extrema der Scharkurve?

e) Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrema.

Lösung:

$$S_y(0 \mid k) \quad und \quad Nullstelle: x = 2k$$

$$\lim_{x \to \infty} f_k(x) = \lim_{x \to \infty} \left(k - \frac{1}{2}x\right) \cdot e^x \rightarrow "(-\infty) \cdot \infty" \rightarrow (-\infty)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(k - \frac{1}{2}x\right) \cdot e^x \overset{"\infty \cdot 0"}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{k + \frac{1}{2}x}{e^x} \overset{"\frac{\infty}{\infty}" \to L'Hospital}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{k + \frac{1}{2}}{e^x} \rightarrow 0$$

$$f_k'(x) = -\frac{1}{2}\cdot e^x + \left(k-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^x = e^x\cdot\left(-\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}x\right)$$

$$f_k''(x) = e^x\cdot\left(-\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}x\right)+e^x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = e^x\cdot\left(-1+k-\frac{1}{2}x\right)$$

$$f_k'(x) = 0 \rightarrow e^x\cdot\left(-\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}x\right) = 0 \rightarrow x = 2k-1$$

$$f_k(2k-1) = \left[k-\frac{1}{2}(2k-1)\right]\cdot e^{2k-1} = \frac{1}{2}\cdot e^{2k-1}$$

$$f_k''(2k-1) = e^{2k-1}\cdot\left[-1+k-\frac{1}{2}(2k-1)\right] = e^{2k-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)<0$$

$$\rightarrow HP\left(2k-1 \;\middle|\; \frac{1}{2}\cdot e^{2k-1}\right)$$

$$x = 2k-1 \rightarrow k = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$y = \frac{1}{2}\cdot e^{2k-1} \xrightarrow{k = \frac{1}{2}(x+1)} y = \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot\frac{1}{2}(x+1)-1} = \frac{1}{2}\cdot e^x$$

Aufgabe 4: Kurvenuntersuchung (anwendungsbezogen) | 8 | |

Die erwarteten Besucherzahlen eines Vergnügungsparks entsprechen modellhaft der Funktion

$$f(t)=100\cdot t\cdot e^{-0{,}05t}+10.000 \quad [t = \text{Anzahl Tage nach Eröffnung}]$$

Formulieren Sie die Fragestellungen (i) bis (iv) als innermathematische Aufgabenstellung.

(i) Wie viele Besucher sind am Eröffnungstag gekommen?

(ii) Nach wie vielen Tagen rechnet man mit der höchsten Besucherzahl? Wie hoch ist diese?

(iii) Zeigen Sie, dass die 10.000er-Marke laut Modell nie unterschritten werden wird.

(iv) Wann nimmt die tägliche Besucheranzahl am stärksten ab?

Lösung:

- ⇨ Berechnen Sie den Schnittpunkt mit der Ordinate (y-Achse)
- ⇨ Ermitteln Sie das Maximum der Funktion.
- ⇨ Bestimmen Sie den Grenzwert für $x \to \infty$ und begründen Sie, warum der Funktionswert 10.000 nie unterschritten wird.
- ⇨ Berechnen Sie den Wendepunkt der Funktion und zeigen/begründen Sie, dass die Funktion hier eine negative Steigung hat.

Aufgabe 5: | 10 | |

Welche Aussagen über die Zahl e sind wahr. a) e ist eine reelle Zahl. b) e ist ein Bruch. c) $e \approx 2{,}71828$. d) e hat eine Periode.	Wahr ist: a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐
Wahr oder falsch? a) Aus f mit $f(x) = e^x$ folgt $f'(x) = x \cdot e^{x-1}$ b) Aus f mit $f(x) = x \cdot e^x$ folgt $f''(x) = (x+2)e^x$ c) Aus f mit $f(x) = (e^x)^2$ folgt $f'(x) = 2e^{2x}$ d) Aus f mit $f(x) = \frac{1}{e^x}$ folgt $f'(x) = -e^{-x}$	Wahr Falsch a) ☐ ☐ b) ☐ ☐ c) ☐ ☐ d) ☐ ☐
Welche der Funktionen stimmt mit ihrer Ableitung überein? $f(x) = 1{,}5e^{x-1} + 5$ $g(x) = 5e^{x+2}$ $h(x) = 2e^{-x} - 2e^x$ $k(x) = -e^{-x} + e^{x+1}$ $m(x) = -8e^x$	☐ f(x) ☐ g(x) ☐ h(x) ☐ k(x) ☐ m(x)

Lösung: **a und c** **f - w - w- w** **m(x) und g(x)**

Zusatzfrage: | 8 | |

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $t(x) = \left[\cos\left(e^{3x}\right)\right]^2$ b) $f(x) = 4^{x^2}$

Lösung:

$$t'(x) = 2\cos\left(e^{3x}\right)\cdot\left[-\sin\left(e^{3x}\right)\right]\cdot e^{3x}\cdot 3 = (-6)\cdot e^{3x}\cdot\sin\left(e^{3x}\right)\cdot\cos\left(e^{3x}\right)$$

$$f(x) = 4^{x^2} = e^{\ln 4^{x^2}} = e^{x^2 \ln 4}$$

$$f'(x) = e^{x^2\ln 4}\cdot 2x\ln 4 = 4^{x^2}\cdot 2x\ln 4 = 2^{2x^2}\cdot 2x\ln 2^2$$

$$f'(x) = 2^{2x^2}\cdot 4x\ln 2 = 2^{2x^2}\cdot 2^2 x\ln 2 = 2^{2x^2+2}\cdot x\ln 2$$