12. Jgst.	5. Test	Datum: 12.02.2020
Kurs M LK 2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Extremwertaufgaben mit rat. Fkt.;**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Bearbeiten Sie 4 der 5 Aufgaben!!!

Aufgabe 1: 10

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2}{x}$.

Bestimmen Sie den Punkt auf dem Graphen der Funktion,
der vom Ursprung den kürzesten Abstand besitzt.

Zeigen Sie auch, dass Ihr Ergebnis ein Minimum darstellt.

Aufgabe 2: 10

Im Baumarkt habe ich 599 m Zaun und eine Zauntür von 1 m Breite und 2 m Höhe gekauft.
Damit soll von einem Grundstück eine rechteckige Form eingezäunt werden, die durch diese Tür auch betreten und wieder verlassen werden kann.

Wie lang sind die Seiten des Rechtecks zu wählen, damit die Fläche maximal wird?

Zeigen Sie auch, dass Ihr Ergebnis ein Maximum darstellt.

10

Aufgabe 3:

Ein Zylinder ohne Deckel soll als Wasserspeicher mit einem Volumen von 1.000 l dienen.

Wie müssen Radius und Höhe gewählt werden, damit der Blechverbrauch minimal wird?

Zeigen Sie auch, dass Ihr Ergebnis ein Minimum darstellt.

Aufgabe 4:

10	

Der Deutsche Wetterdienst warnt wegen des Sturmtiefs „Sabine" vor Sturmschäden, von denen auch Bahnstrecken betroffen sein können.

Neben der Bahnlinie $b(x) = \frac{1}{2}x + 1$ steht im Punkt A(5|1) eine 20m hohe Fichte.

Prüfen Sie, ob für die Bahnstrecke eine Gefahr besteht.

Aufgabe 5:

10	

Eine romanische Fensterform ist zusammengesetzt aus einem Rechteck und einem oben anschließenden Halbkreis.

Das nebenstehende romanische Fenster habe den Umfang U = 5 m und die Rechteckseiten a und b.

Bei welchen Werten für a und b
hat das Fenster den größtmöglichen Flächeninhalt?

1.) Abstandsminimierung

$$e^2 = x^2 + y^2 \xrightarrow{f(x)=y=\frac{2}{x}} e^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = g(x)$$

$$g'(x) = 2x - \frac{8}{x^3} = 0 \xrightarrow{aufgelöst} |x| = \sqrt{2}$$

$$g''(x) = 2 + \frac{24}{x^4} > 0 \rightarrow Min_{Punkt}\left(\pm\sqrt{2} \mid 2\right) \rightarrow Min_{Abs\tan d} = 2[LE]$$

2.) Grundstücksoptimierung

$$U(x,y) = 2x + 2y \xrightarrow{U=600} 600 = 2x + 2y \rightarrow y = 300 - x$$

$$A(x,y) = x \cdot y \xrightarrow{y=300-x} A(x) = x \cdot (300 - x) = 300x - x^2$$

$$A'(x) = 300 - 2x = 0 \xrightarrow{aufgelöst} x = 150 \rightarrow y = 150$$

$$U''(x) = -2 < 0 \rightarrow Max(150 \mid 22.500)$$

3.) Zylinderoptimierung

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h \xrightarrow{V=1.000} V = r^2 \cdot \pi \cdot h = 1.000 \rightarrow h = \frac{1.000}{r^2 \cdot \pi}$$

$$O(r,h) = 2r\pi h + r^2\pi \xrightarrow{h=\frac{1.000}{r^2\cdot\pi}} O(r) = 2r\pi \cdot \frac{1.000}{r^2 \cdot \pi} + r^2\pi = \frac{2.000}{r} + r^2\pi$$

$$O'(r) = -\frac{2.000}{r^2} + 2r\pi = 0 \xrightarrow{aufgelöst} r^3 = \frac{1.000}{\pi} \xrightarrow{\sqrt[3]{}} r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$\rightarrow h = \frac{1.000}{\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2 \cdot \pi} = \frac{1.000 \cdot \pi^{\frac{2}{3}}}{100 \cdot \pi} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \rightarrow h = r \approx 6,82$$

$$O''(r) = \frac{4.000}{r^3} + 2\pi > 0 \rightarrow Min$$

4.) Bahnstrecke

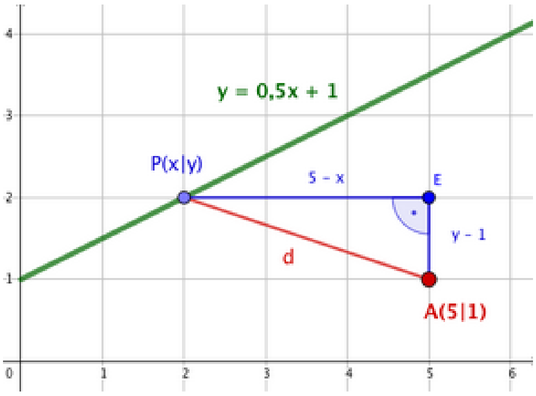
Zielfunktion

Zu minimieren ist der Abstand der beiden Punkte P und A.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$\overline{PA}$

$= d(x,y) = \sqrt{(5-x)^2 + (y-1)^2}$



Der verschiebbare Punkt P gehört zur Funktion $y = 0,5x + 1$. Dies ist die **Nebenbedingung** für die Zielfunktion $d(x,y)$.

Die Nebenbedingung in die Zielfunktion $d(x,y)$ eingesetzt ergibt:

$d(x)$

$= \sqrt{(5-x)^2 + (0,5x + 1 - 1)^2}$

Beachte, dass die Zielfunktion jetzt nur noch von der *einen* Variablen x abhängt.

Fasse zusammen.

$d(x) = \sqrt{1,25x^2 - 10x + 25}$

Beachte: Für denselben - noch zu berechnenden x-Wert - für den $d(x)$ ein Minimum wird, wird auch der Term $d^2(x)$ minimal.

Quadriere deshalb die Gleichung.

$d^2(x) = 1,25x^2 - 10x + 25$

Bilde die 1. Ableitung von $d^2(x)$.

$(d^2)'(x) = 2,5x - 10$

Setze $(d^2)'(x)$ gleich Null und löse die Gleichung nach x auf.

$2,5x - 10 = 0$

$2,5x = 10$

$x = 4$

$x = 4$ liefert ein kleinstes d, wenn die 2. Ableitung $(d^2)''(4)$ positiv ist.

$(d^2)''(x) = 2,5 > 0$

Setze $x = 4$ in die Nebenbedingung ein.

$y = 0,5 \cdot 4 + 1 = 3$

Setze die Koordinaten von P in d ein (**nicht** in d^2).

$\Rightarrow P(4|3)$ ist der gesuchte Punkt auf der Bahnstrecke mit minimalem Abstand zu Punkt A.

$d = \sqrt{(5-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5} \approx 2,24\,LE \approx 22,4\,m$

Da der Baum nur $20\,m$ hoch ist, kann er - vorausgesetzt, ein Sturm trägt einzelne Äste nicht noch weiter - auch dann, wenn er entwurzelt umfällt, die Bahnstrecke nicht gefährden.

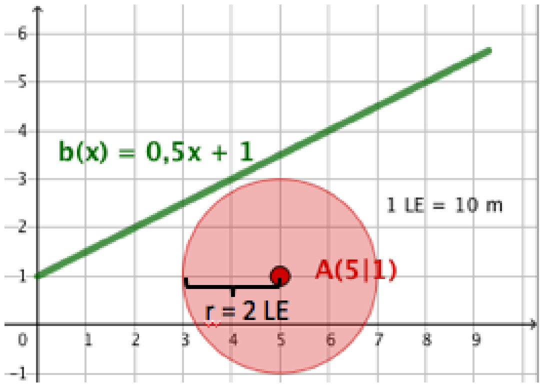
Ergänzende Betrachtung der Aufgabenstellung

Die Kreisfläche um A mit Radius $20\,m$ (= Baumhöhe) beschreibt die Sicherheitszone falls der Baum bei Sturm umstürzen würde.

Da in der Aufgabenstellung lediglich gefragt wird, ob der Baum für die Bahnstrecke "gefährlich" sein könnte, genügt es, rechnerisch oder graphisch nachzuweisen, ob der Sicherheitskreis die Gerade $b(x) = 0,5x + 1$ schneidet oder nicht.

Die graphische Lösung:

Die Kreisfläche um A mit Radius $20\,m$ erreicht die Bahnstrecke nicht.



Der rechnerische Nachweis, dass der Kreis $k(A; 2\,LE)$ die Gerade $b(x) = 0,5x + 1$ nicht schneidet:

Benutze zum Schnitt die Kreisgleichung

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$$

für einen Kreis um den Punkt A mit Radius r und die Geradengleichung $y = b(x)$.

Die Kreisgleichung:

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Die Geradengleichung:

$$y = 0,5x + 1$$

Setze $y = 0,5x + 1$ in die Kreisgleichung ein. Fasse die entstehende quadratische Gleichung zusammen.

$$\begin{aligned} (x-5)^2 + ({\color{red}0,5x+1} - 1)^2 &= 4 \\ x^2 - 10x + 25 + 0,25x^2 &= 4 \\ 1,25x^2 - 10x + 21 &= 0 \end{aligned}$$

Gib die Diskriminante D an.

$$D = 100 - 4 \cdot 1,25 \cdot 21 = -5$$

Da die Diskriminante negativ ist, schneiden sich der "Sicherheitskreis" um A und die Bahnstrecke nicht.

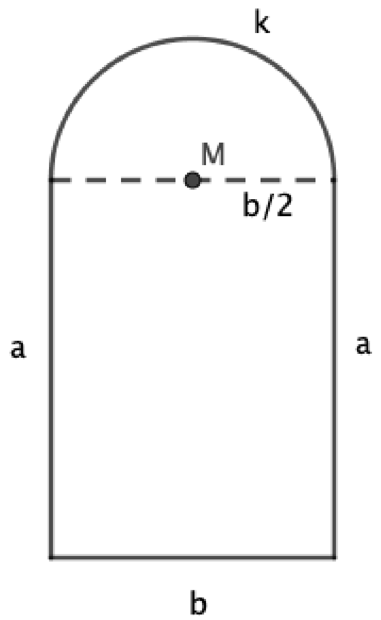
Aufgabe 5: Romanisches Fenster

Für die Form eines romanischen Fensters (Rechteck mit oben angefügtem Halbkreis) soll bei gegebenem Umfang die größtmögliche Fläche berechnet werden.

Die Zielfunktion, deren Maximum zu berechnen ist, ergibt sich als Summe der Rechtecksfläche mit den Seitenlängen $a\,LE$ und $b\,LE$ und der Fäche des Halbkreises mit Radius $b/2\,LE$.

Zielfunktion:

$$A(a;b) = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot (\frac{b}{2})^2\pi$$



Der gegebene Umfang $u = 5\,LE$ ist für die Zielfunktion die "Nebenbedingung".

$$\begin{aligned}
A_{max} &= \frac{5}{4+\pi} \cdot \frac{10}{4+\pi} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{4+\pi}\right)^2 \cdot \pi \\
&= \frac{50}{(4+\pi)^2} + \frac{25\pi}{2 \cdot (4+\pi)^2} \\
&= \frac{100+25\pi}{2(4+\pi)^2} \\
&= \frac{25(4+\pi)}{2(4+\pi)^2} \\
A_{max} &= \frac{12,5}{4+\pi} \\
A_{max} &\approx 1,75
\end{aligned}$$

Ergebnis:

Das romanische Fenster mit dem Umfang $5\,LE$ hat seine größte Fläche von rund $1,75\,FE$, wenn die Grundseite gerade doppelt so groß ist wie die Höhe des Rechtecks.

$$A\left(a,b,r\right)=a\cdot b+\frac{1}{2}r^{2}\cdot\pi\overset{b=2r}{=}a\cdot 2r+\frac{1}{2}r^{2}\cdot\pi\quad\rightarrow\quad\max.$$

$$U\left(a,b,r\right)=2a+b+r\cdot\pi\overset{b=2r}{=}2a+2r+r\cdot\pi=2a+r\left(2+\pi\right)$$

$$\xrightarrow{U=5}\quad U=2a+r\left(2+\pi\right)=5\quad\rightarrow\quad a=\frac{5-r\left(2+\pi\right)}{2}$$

$$A\left(r\right)=\frac{5-r\left(2+\pi\right)}{2}\cdot 2r+\frac{1}{2}r^{2}\cdot\pi=\left[5-r\left(2+\pi\right)\right]r+\frac{1}{2}r^{2}\cdot\pi$$

$$A\left(r\right)=5r-2r^{2}-r^{2}\cdot\pi+\frac{1}{2}r^{2}\cdot\pi=5r-2r^{2}-\frac{1}{2}r^{2}\cdot\pi$$

$$A'\left(r\right)=5-4r-r\cdot\pi=0\quad\rightarrow\quad r\left(4+\pi\right)=5\quad\rightarrow\quad r=\frac{5}{4+\pi}$$

$$A''\left(r\right)=-4-\pi<0\quad\rightarrow\quad Max$$

$$b=2r\quad\rightarrow\quad b=\frac{10}{4+\pi}\quad und\quad a=\frac{5-\frac{5}{4+\pi}\left(2+\pi\right)}{2}=\frac{5}{4+\pi}$$

NR.:

$$a=\frac{5-\frac{5}{4+\pi}\left(2+\pi\right)}{2}=2{,}5-\frac{2{,}5}{4+\pi}\left(2+\pi\right)=\frac{2{,}5\cdot\left(4+\pi\right)-2{,}5\cdot\left(2+\pi\right)}{4+\pi}$$

$$a=\frac{10+2{,}5\pi-5-2{,}5\pi}{4+\pi}=\frac{5}{4+\pi}$$