12. Jgst.	1. Kursarbeit	Datum: 08.10.2021
Kurs 12/1	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Ableitungsregeln; Summenzeichen Kurvenscharen ganzrat. Fkt.**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Kurvendiskussion Scharkurve (ganzrational)**

Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_k(x) = -\frac{1}{4}kx^4 + x^3 \quad mit \quad k > 0$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion **nur eine Extremwertstelle** besitzt, **geben Sie diese an und** berechnen Sie die **Ortskurve der Maxima**.

c) Ermitteln Sie die Wendepunkte der Funktion.

d) Beweisen Sie die Behauptung:
Im Ursprung besitzt die Funktion immer einen Sattelpunkt.

e) Geben Sie die Monotonieintervalle und das entsprechende Verhalten an.

f) Zeichnen Sie die Funktion und deren 1. Ableitung in ein KO-System für k = 1.

g) Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks, für dessen Eckpunkte folgendes gilt:
A(1/0); B: Nullstelle der Funktion mit x > 1 und C: Koordinate des Extremums der Funktion
(i) allgemein (ii) für k = 2

h) Wie lautet die Tangentengleichung an der Stelle $x = \frac{2}{k}$?

Lösung:

Nullstellen: $f_k(x) = -\frac{1}{4}kx^4 + x^3 = x^3\left(-\frac{1}{4}kx + 1\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0\,[dreifach] \quad und \quad x_2 = \frac{4}{k}$

Extrema/Ortskurve:

$$f_k{}'(x) = -kx^3 + 3x^2 = x^2(-kx+3) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0\,[doppelt] \quad und \quad x_2 = \frac{3}{k}$$

$$f_k{}''(x) = -3kx^2 + 6x \quad \rightarrow \quad f_k{}''\left(\frac{3}{k}\right) = -3k\left(\frac{3}{k}\right)^2 + 6\cdot\frac{3}{k} = -\frac{9}{k} < 0 \quad \rightarrow \quad Max\left(\frac{3}{k} \,\middle|\, \frac{27}{4k^3}\right)$$

Anmerkung: Bei x = 0 liegt kein Extremum vor, da eine doppelte NS in f '(x) vorliegt.

$$Ortskurve: \quad x = \frac{3}{k} \quad \rightarrow \quad k = \frac{3}{x} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{x}\right)\cdot x^4 + x^3 = -\frac{3}{4}x^3 + x^3 = \frac{1}{4}x^3$$

Wendepunkte:

$$f_k{}''(x) = -3kx^2 + 6x = x(-3kx+6) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = \frac{2}{k}$$

$$f_k{}'''(x) = -6kx + 6 \quad \rightarrow \quad f_k{}'''(0) = 6 \neq 0 \rightarrow W_1(0 \mid 0) \quad und \quad f_k{}'''\left(\frac{2}{k}\right) = -6 \neq 0 \rightarrow W_2\left(\frac{2}{k} \,\middle|\, \frac{4}{k^3}\right)$$

Sattelpunkt: Zu zeigen ist, dass $W_1(0 \mid 0)$ die Steigung m = 0 besitzt:

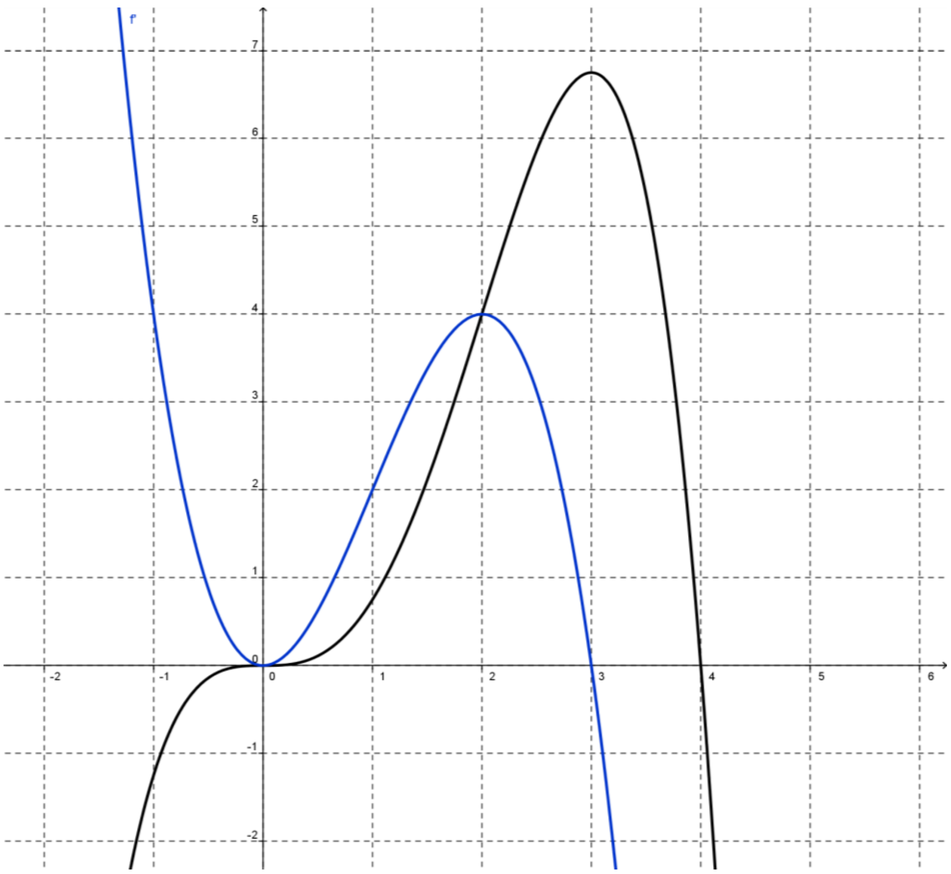
$$f_k'(x) = -kx^3 + 3x^2 \xrightarrow{x=0} f_k'(0) = 0$$

Monotonieintervalle:

$$I_1 = \left]-\infty \quad \frac{3}{k}\right[\quad \text{(streng) monoton steigend [Sattelpunkt bei x = 0]}$$

$$I_2 = \left]\frac{3}{k} \quad \infty\right[\quad \text{sterng monoton fallend}$$

Graph für k=1:



Fläche des Dreiecks:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot Grundlinie \cdot Höhe \rightarrow A_{k;\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{k} - 1\right) \cdot \frac{27}{4k^3} = \left(\frac{4}{k} - 1\right) \cdot \frac{27}{8k^3}$$

$$\rightarrow A_{2;\Delta} = \left(\frac{4}{2} - 1\right) \cdot \frac{27}{8 \cdot 2^3} = \frac{27}{64}$$

Tangentengleichung:

$$x = \frac{2}{k} \rightarrow W_2\left(\frac{2}{k} \,\middle|\, \frac{4}{k^3}\right) \xrightarrow[\text{tangente}]{\text{Wende-}} t(x) = \frac{4}{k^2} \cdot x - \frac{4}{k^3}$$

$$\xrightarrow{Steigung} f_k'\left(\frac{2}{k}\right) = -k\left(\frac{2}{k}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{k}\right)^2 = -\frac{8}{k^2} + \frac{12}{k^2} = \frac{4}{k^2} = m \quad \underset{t(x)=mx+b}{\overset{y-Achsenabschnitt}{und}} \quad \frac{4}{k^3} = \frac{4}{k^2} \cdot \frac{2}{k} + b \rightarrow b = -\frac{4}{k^3}$$

Aufgabe 2: **Ganzrationale Funktion mit Parameter**

Untersuchen Sie die Funktion $f_k(x) \;=\; x^4 - kx^2 - 4 \quad mit\; k > 0$.

a) Bestimmen Sie die Nullstelle(n) der Funktion in Abhängigkeit von k.

b) Für welchen Wert von k hat die Funktion die Nullstelle **x = 2**?

Lösung:

$$f_k(x) \;=\; x^4 - kx^2 - 4 \;=\; 0$$

$$Substitution: \quad u := x^2$$

$$u^2 - ku^2 - 4 \;=\; 0 \;\rightarrow\; u_{1/2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2+16}}{2} \;\rightarrow\; x^2 = \frac{k \pm \sqrt{k^2+16}}{2}$$

$$\rightarrow\; |x| = \sqrt{\frac{k \pm \sqrt{k^2+16}}{2}} \;\xrightarrow{x=2}\; 4 = \frac{k \pm \sqrt{k^2+16}}{2} \;\rightarrow\; 8-k = \sqrt{k^2+16}$$

$$\xrightarrow{Quadrieren}\; (8-k)^2 = k^2+16 \;\rightarrow\; 64 - 16k + k^2 = k^2 + 16 \;\rightarrow\; k = 3$$

Aufgabe 3: **Ableitungen**

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung
und vereinfachen Sie den Term dann so weit wie möglich bzw. sinnvoll:

a) $f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{3}\left(2x^k - 5\right)$ b) $f_k(x) \;=\; kx^2\left(3k^2x - 5\right)$

c) $f_k(x) \;=\; \frac{kx^2 + x^3}{x^4}$ d) $f_k(x) \;=\; x^{2k-3} - \frac{2}{k^2}x^{k^3}$

Lösung:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{3}\left(2x^k - 5\right) = 2\sum_{k=1}^{3} x^k - 15 \;\rightarrow\; f'(x) = 2\sum_{k=1}^{3} kx^{k-1} = 2\cdot\left(1 + 2x + 3x^2\right) = 2 + 4x + 6x^2$$

$$f_k(x) = kx^2\left(3k^2x - 5\right) = 3k^3x^3 - 5kx^2 \;\rightarrow\; f_k'(x) = 9k^3x^2 - 10kx$$

$$f_k(x) = \frac{kx^2 + x^3}{x^4} = \frac{k}{x^2} + \frac{1}{x} = kx^{-2} + x^{-1} \;\rightarrow\; f_k'(x) = (-2)kx^{-3} - x^{-2} = \frac{(-2)k}{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

$$f_k(x) = x^{2k-3} - \frac{2}{k^2}x^{k^3} \;\rightarrow\; f_k'(x) = (2k-3)x^{2k-4} - k^3\cdot\frac{2}{k^2}x^{k^3-1} = (2k-3)x^{2k-4} - 2kx^{k^3-1}$$

Aufgabe 4: **Anwendungen zur Differentialrechnung**

Eine 100 cm hohe und 70 cm breite Regentonne (kreisförmiger Behälter; Zylinder) wird durch eine Ablassöffnung entleert.

Die Höhe des h des Wasserstandes kann durch die Funktion $h(t) = \frac{1}{18}t^2 - 5t + 100$ modelliert werden. ***t ist dabei die Zeit in Minuten und h die Höhe in cm.***

a) Nach welcher Zeit steht das Wasser nur noch 30 cm hoch?
b) Wann ist das Wasser ganz abgelaufen?
c) Wie hoch ist der Wasserstand nach 6 Minuten?
d) Wie viel Wasser läuft in den ersten 6 Minuten insgesamt ab?
Anmerkung: Die Volumenformel für einen Zylinder lautet: $V = r^2\pi \cdot h$
e) Wie schnell ändert sich der Wasserstand zum Zeitpunkt **t** = 3?
Anmerkung: Bitte mit der 1. Ableitung ermitteln.
f) Warum ist der Definitionsbereich $t \in [0\,;30]$ nur sinnvoll?

Lösung:

$$30 = \frac{1}{18}t^2 - 5t + 100 \rightarrow t_1 = 17,34 \wedge t_2 = 72,65 \rightarrow L = \{17,34\}$$

$$0 = \frac{1}{18}t^2 - 5t + 100 \rightarrow t_1 = 30 \wedge t_2 = 60 \rightarrow L = \{30\}$$

$$h(6) = \frac{1}{18}\cdot 36 - 5\cdot 6 + 100 = 72$$

$$V = 35^2 \cdot \pi \cdot 28 = 107.756,63\left[cm^3\right] \rightarrow V = 107,76\left[dm^3\right] = 107,76\left[ltr.\right]$$

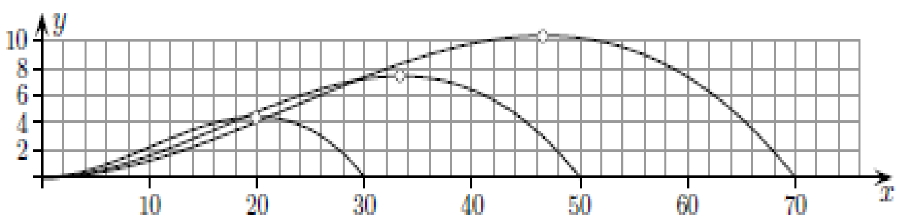
$$h'(t) = \frac{1}{9}t - 5 \xrightarrow{t=0} h'(3) = -4\frac{2}{3}\left[\frac{cm}{\min}\right]$$

Bei t = 0 beginnt die Entleerung; bei t = 30 ist die Regentonne leer.

Aufgabe 5: **Deichanalysen**

Querschnitte von Deichen können durch die Deich-Funktionenschar

$deich_k(x) = -\frac{1}{k^2}x^3 + \frac{1}{k}x^2 \quad mit\ k > 0$ modelliert werden.



a) Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen anhand der Nullstelle(n) den Wert von k zu.
b) Zeigen Sie, dass die Steigung der Graphen der Funktionenschar in den Nullstellen von k unabhängig ist.

Lösung:

Nullstellen :

$$deich_k(x) = -\frac{1}{k^2}x^3 + \frac{1}{k}x^2 = x^2\left(-\frac{1}{k^2}x + \frac{1}{k}\right) \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0\left[doppelt\right] \quad und \quad x_2 = k$$

$$\rightarrow \quad k_1 = 30 \qquad\qquad k_2 = 50 \qquad\qquad k_3 = 70$$

$$deich_k\,'(x) = -\frac{3}{k^2}x^2 + \frac{2}{k}x \quad \rightarrow \quad deich_k\,'(k) = -\frac{3}{k^2}\cdot k^2 + \frac{2}{k}\cdot k = -1 = m \quad \left[ohne\ k\right]$$

Aufgabe 6: **Behauptungen zu ganzrationalen Funktionen**

Entscheiden Sie, ob folgende Behauptungen wahr oder falsch sind.
Erstellen Sie für jede Aussage ein Beispiel oder ein Gegenbeispiel, welches Ihre Entscheidung dokumentiert.

Behauptung 1: Jede Funktion zweiten Grades hat mindestens eine Nullstelle.

FALSCH $f(x) \quad = \quad x^2 + 1$

Behauptung 2: Ein Extrempunkt besitzt immer eine waagrechte Tangente.

RICHTIG $f\,'(x) \quad = \quad m \quad = \quad 0 \quad \leftrightarrow \quad notwendige\ Bedingung$

Behauptung 3: Jede Funktion dritten Grades hat immer zwei Extremwertstellen.

FALSCH $f(x) \quad = \quad x^3$ hat nur einen Sattelpunkt und keine Extrema

Behauptung 4: Der Grad der Ableitung einer Funktion ist immer kleiner als der Grad der Funktion selbst.

RICHTIG

Bei ganzrationalen Funktionen ist die Ableitung wie folgt zu bilden: $f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad f\,'(x) = n \cdot x^{n-1}$
daraus folgt: der Grad der Ableitung ist um eins kleiner als der Grad der Ausgangsfunktion

Zusatzaufgabe: **Fallunterscheidung bei Parametern**

Bei der Nullstellenberechnung einer Funktion erhält man folgendes Ergebnis:

$$x_{1/2} \quad = \quad \frac{-3 \pm \sqrt{2k^2 - 8}}{2}$$

Für welche Werte von k hat die Funktion

a) eine Nullstelle? b) keine Nullstelle? c) zwei Nullstellen?

Lösung:

$$\text{Diskriminante:} \quad 2k^2 - 8 \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad |k| \quad = \quad 2$$

$$\text{1 Nullstelle:} \quad k \in \{\pm 2\} \qquad \text{2 Nullstellen:} \quad k \in \Re \setminus [-2\,;2] \qquad \text{keine Nullstelle:} \quad k \in \left]-2\,;2\right[$$