12. Jgst.	6. Test	Datum: 18.05.2022
Kurs M LK	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

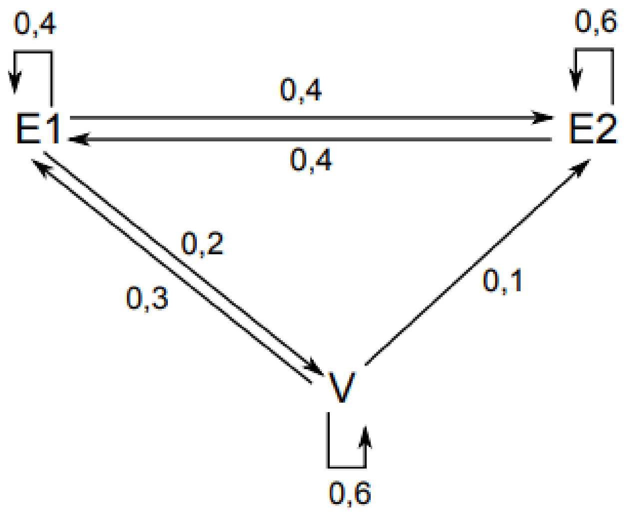
Thema: **Übergangsprozesse und Stat. GG**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Übergänge beschreiben und berechnen** **20**

In der Kantine einer Firma werden täglich drei Gerichte angeboten: Essen 1 (E1), Essen 2 (E2), sowie ein vegetarisches Menü (V).
Das Wahl-/Entscheidungsverhalten der Stammkunden der Kantine ist in folgender Graphik dargestellt:



a) Beschreiben Sie das Verhalten der Stammkunden am Beispiel von Essen E1 in Worten

Freie Antwort

b) Erstellen Sie die Übergangsmatrix U und den Zustandsvektor von Montag, an dem E1 und E2 gleich häufig gewählt wurden und 20 % vegetarisch gespeist haben.

$$U = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{z_{Montag}} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

c) Welche Verteilungen liegen an den Tagen Dienstag und Mittwoch vor?

$$U \cdot \overrightarrow{z_{Montag}} = \overrightarrow{z_{Dienstag}} \rightarrow \overrightarrow{z_{Dienstag}} = \begin{pmatrix} 0,38 \\ 0,42 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \overrightarrow{z_{Dienstag}} = \overrightarrow{z_{Mittwoch}} \rightarrow \overrightarrow{z_{Mittwoch}} = \begin{pmatrix} 0,38 \\ 0,424 \\ 0,196 \end{pmatrix}$$

d) Wie war das Essverhalten am Freitag, wenn man davon ausgehen kann, dass die Kantine am Wochenende geschlossen war?
Erläutern Sie das besondere Ergebnis.

$$U \cdot \overrightarrow{z_{Freitag}} = \overrightarrow{z_{Montag}} \xrightarrow{LGS} \overrightarrow{z_{Freitag}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \overrightarrow{z_{Freitag}} = \overrightarrow{z_{Montag}} \xrightarrow[U]{Inverse} \overrightarrow{z_{Freitag}} = U^{-1} \cdot \overrightarrow{z_{Montag}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Am Freitag haben alle Besucher der Kantine nur das Essen E1 genommen.

e) Kantinenchef Kuno Schmakofaz möchte für die Zukunft besser planen können und fragt sich, ob auf lange Sicht das vegetarische Menü V von mindestens 20 % der Kantinenbesucher gewählt werden wird. Bitte klären Sie die Fragestellung.

$\textit{Ansatz:}$

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \xrightarrow{-\vec{x}} U \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \xrightarrow{\vec{x}\ ausklammern} (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$\textit{und berücksichtigen, dass gilt:} \quad x + y + z = 1$

$$U - E = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & -0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & -0,4 \end{pmatrix} \xrightarrow{hLGS} \left(\begin{array}{ccc|c} -0,6 & 0,4 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & -0,4 & 0,1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow z = 0,1905 < 0,2$$

5

Aufgabe 2: Übergänge darstellen

Stellen Sie die durch die Matrix beschriebenen Übergänge in einem Gozintographen dar – vervollständigen Sie bitte die fehlenden Werte 😉

	A	B	C
A	$0,3$	0	$3c$
B	b	a	$9c$
C	$0,7$	a	$0,4$

Spaltensumme muss 1 sein; b = 0 a = 0,5 c = 0,05 + Gozintograph zeichnen

Aufgabe 3: **Theorie und Gauß-Nachweis** | 15 | |

a) Erläutern Sie kurz die Herleitung des Ansatzes für das statische Gleichgewicht (allgemeine Darstellung)

$$Ansatz:$$

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \xrightarrow{-\vec{x}} U \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \xrightarrow{\vec{x}\ ausklammern} (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

b) Führen Sie die notwendige Berechnung mittels Gauß-Verfahrens durch, wenn folgende Übergangsmatrix gegeben ist:

$$U = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$Ansatz:$$

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \xrightarrow{-\vec{x}} U \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \xrightarrow{\vec{x}\ ausklammern} (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$(U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -0,3 & 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & -0,6 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & -0,5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{hLGS} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{13}\!/_{8}\, z \\ {}^{7}\!/_{16}\, z \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{16} \cdot k \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix} \quad mit\ k \in \Re$$