

Thema: Stochastik – Baumdiagramm/Pfadregeln;  
ZE/Ereignisse; Bed. W'keit; Vierfeldertafel;  
Erwartungswert; Totale W'keit/Bayes

Name:

Punkte:

Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

### Aufgabe 1: Mengen und Venn-Diagramme

2

Teil I: Kreuzen Sie die richtige Antwort an:

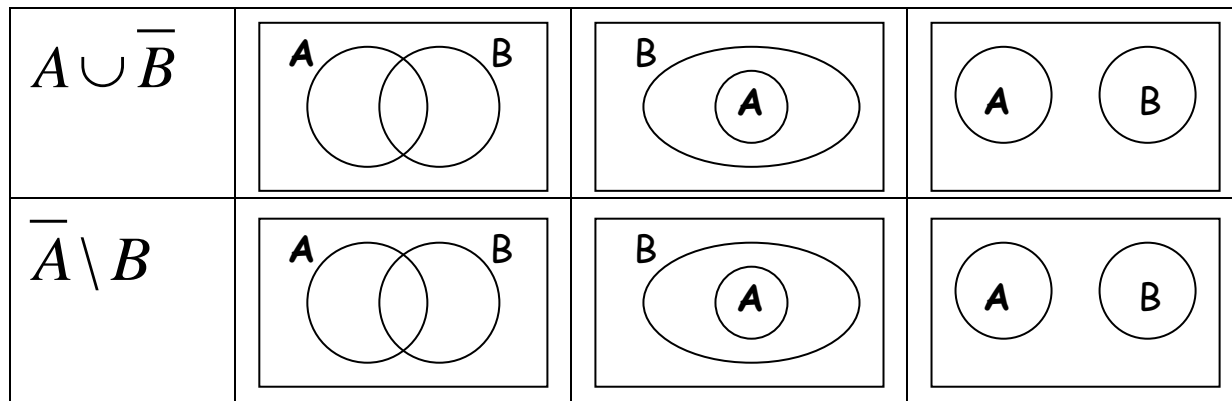
- Für ein Laplace-Experiment gilt immer:
  - Es hat genau zwei Ausgänge.
  - Sind A und B Elementarereignisse eines Laplace-Experiments, dann gilt:  $P(A) = P(B)$
  - Alle Ereignisse eines Laplace-Experiments haben die gleiche Wahrscheinlichkeit.
  - Ist E ein Elementarereignis, dann ist  $P(E) = 1$ .
  - Ist  $P(E) = 0,5$  dann muss E ein Elementarereignis sein.
  - Keine der vorstehenden Antworten ist richtig.



Teil II: Ereignisse in Venn-Diagrammen

12

Schraffieren Sie jeweils in den folgenden drei Diagrammen die Ereignisse:



Teil III: Mengendiagramme & Mengenlehre

6

Ein Würfel wird einmal geworfen. Die Ereignisse sind wie folgt:

$A = \{ \text{„die Augenzahl ist kleiner als 3“} \}$  und  $B = \{ \text{„die Augenzahl ist ungerade“} \}$

Ermitteln Sie nun die folgenden verknüpften Ereignisse:

a)  $A \cap B$

b)  $A \cup B$

c)  $A \cap \bar{B}$

Teil IV: Ergebnismengen und Wahrscheinlichkeiten I

|   |  |
|---|--|
| 8 |  |
|---|--|

Gegeben sei eine Ergebnismenge:  $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$

Berechnen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten:

a)  $P(1)$  wenn gilt:  $P(2) = \frac{1}{2}; P(3) = \frac{1}{4}; P(4) = \frac{1}{12}$

b)  $P(1)$  und  $P(2)$  wenn gilt:  $P(3) = \frac{1}{5}; P(4) = \frac{1}{8}; P(1) = 2 \cdot P(2)$

Teil V: Ergebnismengen und (bedingte) Wahrscheinlichkeiten II

|   |  |
|---|--|
| 9 |  |
|---|--|

Für zwei Ereignisse A und B gelten folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = \frac{7}{16}, \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

Berechnen Sie hieraus die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

a)  $P(A \cup B)$       b)  $P(\bar{A})$       c)  $P_A(B)$

Aufgabe 2: Rechnen und Beweisen

|    |  |
|----|--|
| 18 |  |
|----|--|

**Bearbeiten Sie die Fragestellungen mit Begründung bzw. mathematischer Beweisführung.**

Teil I: Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a)  $\frac{102!}{100!}$       b)  $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

Teil II: Beweisen Sie folgende Gleichungen:

(i)  $P_B(A \cup B) = 1$       (ii)  $P_\Omega(A) = P(A)$

Teil III: Bestimmen Sie den Wert für

(i)  $P_A(A) = ???$       (ii)  $P_{\bar{A}}(A) = ???$

Aufgabe 3: Zufallsexperimente und Ereignisse

|    |  |
|----|--|
| 15 |  |
|----|--|

Zwei achtseitige Würfel mit den Ziffern 1 bis 8 werden gleichzeitig geworfen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man dabei

- a) einen Pasch?
- b) ein Produkt der Augenzahlen von höchstens 5?
- c) Zwei verschiedene Augenzahlen?
- d) eine Summe der Augenzahlen von größer als 14

**Aufgabe 4: Kombinatorik**

|    |  |
|----|--|
| 14 |  |
|----|--|

**Teil I:** Im Lokal „Zur fetten Henne“ stehen für ein Festmenü 4 Vorspeisen, 3 Zwischengerichte, 10 Hauptspeisen und 5 Desserts zur Auswahl.

Wie viele Kombinationen aus je einer Vorspeise, einem Zwischengericht, einer Hauptspeise und einem Dessert können gebildet werden?

**Teil II:** Bei einer Familienfeier im Lokal „Zur fetten Henne“ stößt jeder Gast mit jedem anderen Gast einmal mit einem Sektglas an. Insgesamt wurde **3.081 Mal** angestoßen. Ermitteln Sie mit mathematischen Methoden, **wie viele Gäste** an der Familienfeier teilnahmen.

**Teil III:** a) Beim Abfahrtslauf starten 10 Skiläufer. Wie viele verschiedene Startfolgen sind möglich, wenn die 4 besten Läufer in der Gruppe A starten und 6 übrigen in Gruppe B?

Der Kilometerzähler eines Pkw. hat 5 Stellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ...

b) ... insgesamt?

c) ... dass alle Stellen verschieden sind?

**Aufgabe 5: Pfadregel und Baumdiagramm I**

|    |  |
|----|--|
| 20 |  |
|----|--|

Gegeben ist das folgende Baumdiagramm zu den Ereignisse C und D:

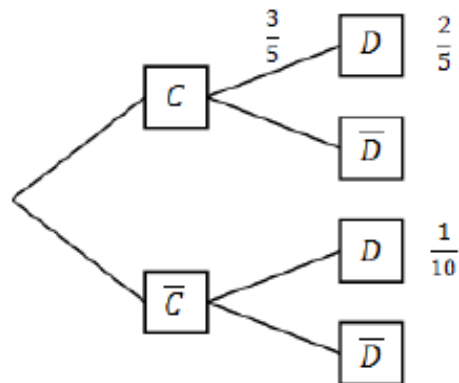
a) Ergänzen Sie die fehlenden Werte des Baumdiagramms.

b) Berechnen Sie  $P(\bar{D})$ .

c) Beweisen Sie die Behauptung:

Die Ereignisse C und D sind voneinander abhängig.

d) Wie muss der Zahlenwert 0,1 geändert werden, damit die Ereignisse C und D stochastisch unabhängig sind?



**Aufgabe 6: Pfadregel und Baumdiagramm II**

|   |  |
|---|--|
| 5 |  |
|---|--|

Ein elektronisches Gerät ist aus 10 Elementen zusammengesetzt, die unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p arbeiten.

Ist mindestens ein Element defekt, dann arbeitet das Gerät bereits nicht mehr.

Wie groß muss p mindestens sein, damit das Gerät mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von **mindestens 90 % funktioniert**?

**Aufgabe 7: Pfadregel und Baumdiagramm III**

|    |  |
|----|--|
| 15 |  |
|----|--|

In einer Packung sind 10 Glühlampen, davon sind zwei defekt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse, wenn **drei** Glühlampen "blind" **ohne Zurücklegen** herausgegriffen werden?

a) A: „Alle drei Glühlampen sind in Ordnung.“

b) B: „Mindestens eine Glühlampe ist defekt.“

Nun ist die Anzahl der defekten Glühlampen der 10er-Packung nicht bekannt.  
 Untersucht wird das Ereignis C: „Genau zwei Glühlampen sind defekt.“

c) Analysieren den Ansatz und erklären Sie, was in diesem Zusammenhang die Variable x darstellt:

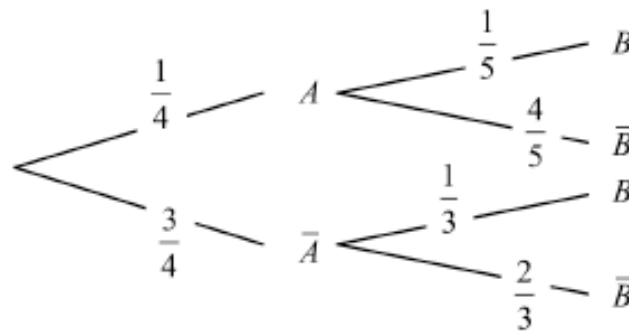
$$P(C) = 3 \cdot \frac{x}{10} \cdot \frac{x-1}{9} \cdot \frac{10-x}{8}$$

d) Wie viele Lampen müssten mindestens defekt sein, damit bei Ereignis C ein Ergebnis von mindestens  $\frac{4}{15}$  entsteht?

**Aufgabe 8: Vierfeldertafel und Baumdiagramm => Bedingte Wahrscheinlichkeit I**

Gegeben ist folgendes Baumdiagramm:

|           |  |
|-----------|--|
| <b>20</b> |  |
|-----------|--|



- a) Schreiben Sie das Diagramm auf mit absoluten Zahlen bei einer Gesamtversuchszahl von  $N = 1.200$ .
- b) Erstellen Sie auf der Basis der Wahrscheinlichkeiten des Baumdiagramms eine Vierfeldertafel.

|                            |          |  |                            |
|----------------------------|----------|--|----------------------------|
|                            | <b>B</b> |  | <b><math>\Sigma</math></b> |
| <b>A</b>                   |          |  |                            |
|                            |          |  |                            |
| <b><math>\Sigma</math></b> |          |  | <b>1</b>                   |

c) Bestimmen Sie das umgekehrte Baumdiagramm.

**Aufgabe 9: Tablets im Test**

Der vollgeladene Akku eines Tablets **hält im Durchschnitt 300 Minuten**.

Der Akku-Leistungstest von 100 Tablets ist nachfolgend tabellarisch dargestellt:

|                           |            |            |             |            |            |            |
|---------------------------|------------|------------|-------------|------------|------------|------------|
| <b>Anzahl</b>             | <b>7</b>   | <b>14</b>  | <b>0,1k</b> | <b>k</b>   | <b>25</b>  | <b>10</b>  |
| <b>Akku-Laufzeit</b>      | <b>240</b> | <b>250</b> | <b>270</b>  | <b>???</b> | <b>320</b> | <b>330</b> |
| <b>Wahrscheinlichkeit</b> |            |            |             |            |            |            |

- a) Ermitteln Sie den Wert für k, die fehlende Akku-Laufzeit in der Tabelle und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man mindestens 5 Stunden mit dem Tablet arbeiten, ohne es zwischendurch am Stromnetz anschließen zu müssen.
- c) Welche Mindest-Akku-Laufzeit könnte mit 93% Wahrscheinlichkeit garantiert werden?

Die Akku-Module wurden in verschiedenen Ländern hergestellt.

China: 40 % - Indien: 25 % - Thailand: 30 % - Myanmar: Rest

Allerdings ist die Verarbeitung bei den Hersteller-Ländern von unterschiedlicher Qualität, so dass nicht alle Produkte verkauft werden können.

Die Quote der Fehlerhaftigkeit in den einzelnen Ländern ist wie folgt:

China: 8 % - Indien: 10 % - Thailand: 9 % - Myanmar: 12 %

- d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Produkt einwandfrei?
- e) Bei der Qualitätskontrolle wird ein fehlerhafter Akku gefunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt er aus **Indien oder Myanmar**?
- f) Wie hoch darf die Fehlerquote der Produktion in Thailand höchstens sein, damit die Produkte in ihrer Gesamtheit zu 93 % fehlerfrei sind?



**Zusatzfragen:**  
**Wo liegt Myanmar,**  
**wie lautet die Hauptstadt**  
**und**  
**welches war der**  
**ehemalige Staatenname?**

**Zusatzaufgabe: Erwartungswert**

|   |  |
|---|--|
| 6 |  |
|---|--|

Wie groß ist der Winkel  $\alpha$  zu wählen, damit der Erwartungswert 4,50 € beträgt?

