

13. Jgst.

3. Kursarbeit (ProbeAbitur)  
Kurs 13/2

Datum: 03.03.2023

Fach: Mathematik (Leistungsfach)

Thema: Alle drei Themenschwerpunkte  
Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

**Themenbereich 1: Analysis**Betrachtet wird die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = 2 \cdot (1-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} \quad \text{und} \quad x \in \mathbb{R}$$

Der Graph  $G_f$  der Funktion  $f$  ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt  $W_1(1/0)$ .Die Abbildung 1 zeigt den Graphen  $G_f$  der Funktion – leider ist die Skalierung an den Achsen „verloren“ gegangen.

[6]

1.1 Ermitteln Sie folgende weitere signifikante Werte, um dann die Skalierung anzufügen.

- ⇒  $S_y$
- ⇒ Nullstelle(n)

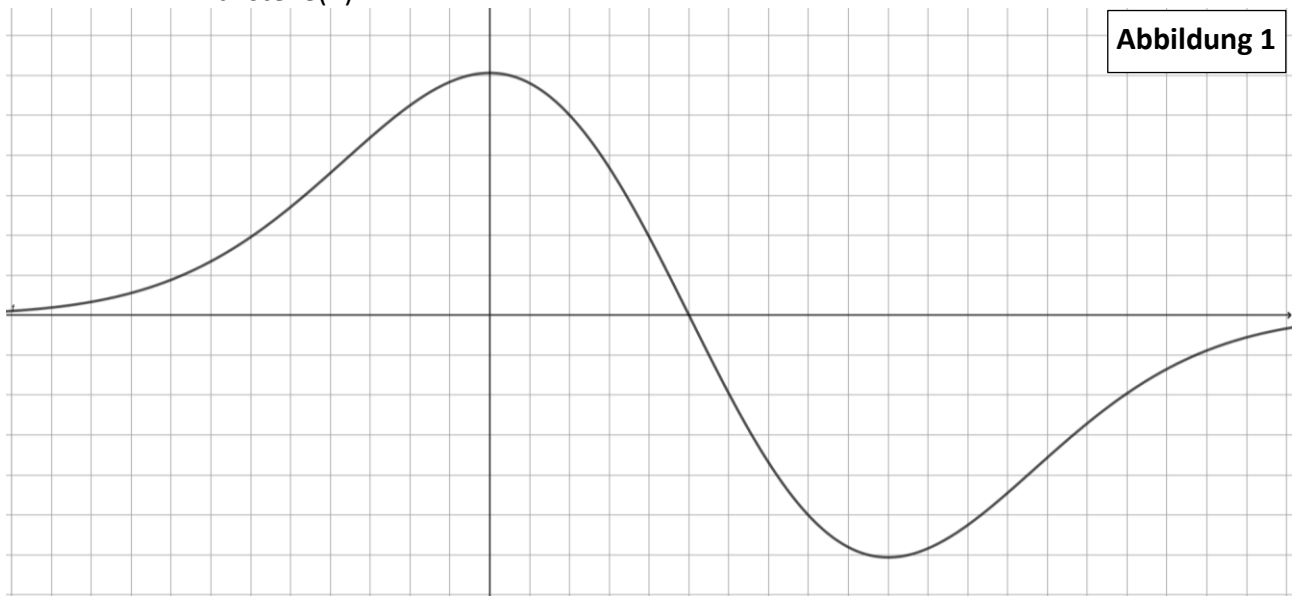


Abbildung 1

1.2 Begründen Sie mit Hilfe des Funktionsterms, dass  $f$  genau eine Nullstelle hat.

[6]

1.3 Beweisen Sie, dass das Grenzwertverhalten der Funktion für  $x \rightarrow \pm \infty$  das anhand des Graphen zu erkennende Grenzwertverhalten aufweist.

[8]

1.4 Zeigen Sie mittels Integralrechnung, dass die Funktion  $F(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$  eine Stammfunktion der Funktion  $f$  ist.

[10]

1.5 Bestimmen Sie  $b > 1$  so, dass gilt:  $\int_1^b f(x) dx = (-1)$ 

[6]

- 1.6 Neben  $W_1(1 | 0)$  und  $W_2(1 + \sqrt{3} | f(1 + \sqrt{3}))$  besitzt der Graph  $G_f$  genau einen weiteren Wendepunkt  $W_3$ . Skizzieren Sie die drei Wendepunkte in die Abbildung 1 und begründen Sie mithilfe der Abbildung 1, dass  $W_3$  die x-Koordinate  $1 - \sqrt{3}$  besitzt.  
**(Anmerkung: Den WP nicht berechnen, sondern argumentativ entwickeln)**

[8]

Gegeben sei:  $f'(x) = 2 \cdot (x^2 - 2x) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$

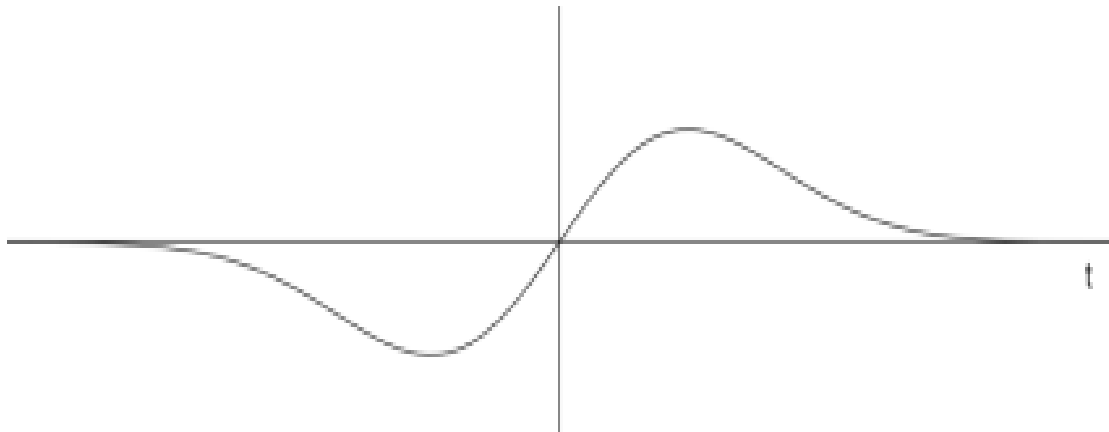
[8]

- 1.7 Ermitteln Sie die Steigungen in den drei Wendepunkten.

- 1.8 Skizzieren Sie in der Abbildung 1 den Graphen der Ableitungsfunktion  $f'(x)$ .

[6]

Gegeben sei nun die Funktionenschar  $h_{a,b}(t) = a \cdot t \cdot e^{b \cdot t^2}$  mit  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $t \in \mathbb{R}$ . Die Abbildung 2 zeigt einen Graphen der Funktionenschar  $h_{a,b}(t)$ .



- 1.9 Geben Sie das jeweilige **Vorzeichen** der Parameter a und b an.

[6]

Nach der Einnahme eines Medikaments um 6:00 Uhr kann die Konzentration des Wirkstoffs im Blut durch eine Funktion  $h_{a,b}(t)$  beschrieben werden.

Dabei ist t die Zeit in Stunden nach der Einnahme und  $h_{a,b}(t)$  ist die Konzentration des Wirkstoffes im Blut in Milligramm pro Liter. Es gilt:  $t \geq 0$

Die maximale Konzentration des Wirkstoffs von  $4 \frac{mg}{l}$  wird zwei Stunden nach der Einnahme erreicht.

- 1.10 Bestimmen Sie die entsprechenden Werte der Parameter a und b.

[8]

Unabhängig von den Ergebnissen zuvor, sollen nun für die Parameter a und b im Zeitraum zwischen 6:00 Uhr und 9:30 Uhr folgende Werte gelten:

$$h_{3;-0,15}(t) = 3 \cdot t \cdot e^{-0,15 \cdot t^2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 3,5$$

Es kann angenommen werden, dass danach der Wirkstoff linear mit derselben Änderungsrate wie zum Zeitpunkt 9:30 Uhr abgebaut.

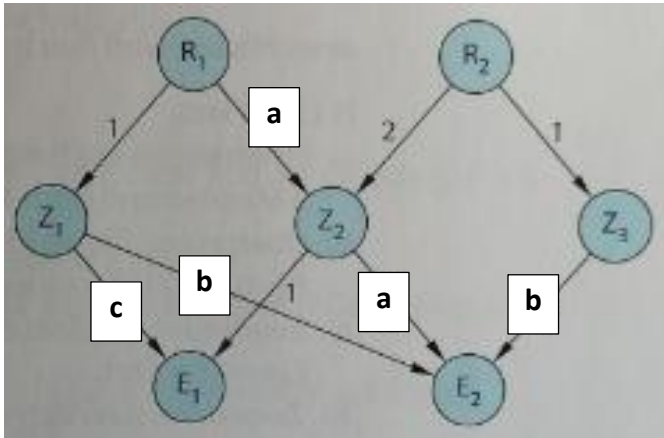
- 1.11 Ermitteln Sie rechnerisch ein (Geraden)Gleichung  $w(t)$ , die diesen linearen Abbau Beschreibt **und** berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut sein wird.

[8]

**Themenbereich 2: Lineare Algebra I**

Das Unternehmen Outchair GmbH stellt zwei Typen Kunststoffstühle  $E_1$  und  $E_2$  für den Außenbereich in zwei Produktionsschritten her.

Das Diagramm beschreibt einen mehrstufigen Produktionsprozess. Aus Rohstoffen werden Zwischenprodukte und aus diesen wiederum die Kunststoffstühle als Endprodukte hergestellt. Die benötigten Mengeneinheiten sind im Diagramm angegeben – leider haben sich ein paar Lücken ergeben.



- 2.1 Bestimmen Sie die beiden Wertekombinationen der Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$ , wenn gilt:

[8]

$$M_{RE} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

**Unabhängig vom Ergebnis verwenden Sie jetzt für  $a = 2$ ,  $b = 3$  und  $c = 1$ .**

- 2.2 Zeigen Sie, dass die Matrix  $(M_{RE})^{-1}$  folgende Form annimmt:

[8]

$$(M_{RE})^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- 2.3 Bestimmen Sie zudem noch die **Determinante von  $M_{RE}$** .

[5]

- 2.4 Ermitteln Sie die benötigten Rohstoffmengen, wenn man von  $E_1$  20 und von  $E_2$  30 Mengeneinheiten liefern soll?

[9]

Im Lager befindet sich folgende Menge an Zwischenprodukten:  $\vec{z} = \begin{pmatrix} 90 \\ 65 \\ 75 \end{pmatrix}$ .

- 2.5 Zeigen Sie, dass damit die **Gesamtsumme von 40 Kunststoffstühlen** erzeugt werden kann und danach das Lager vollkommen leer ist.

[8]

Für die Produktion der beiden Stühle stehen 720 Maschinenstunden, 75 Montagestunden und 1 800 Mengeneinheiten (ME) des Werkstoffs Kunststoff zur Verfügung.

Die Angaben in der folgenden Tabelle beziehen sich jeweils auf die Produktion eines Stuhls.

	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>
<b>Maschinenstunden</b>	<b>1,8</b>	<b>1,2</b>
<b>Montagestunden</b>	<b>0</b>	<b>0,3</b>
<b>Kunststoff in ME</b>	<b>3</b>	<b>6</b>

Die Stückkosten für  $E_1$  und  $E_2$  liegen bei:  $\overrightarrow{\text{stückkosten}} = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ ;

die Verkaufspreise sind mit  $\overrightarrow{\text{vkpreis}} = \begin{pmatrix} 18 \\ 28 \end{pmatrix}$  kalkuliert.

2.6 Ermitteln Sie grafisch den maximalen Gewinn.

[12]

Auf dem Kundenparkplatz der Outchair GmbH hat eine **Bäckerei-Verkaufsstelle** ihr Geschäft eröffnet. Das Angebot besteht u.a. aus drei Brötchensorten, die von drei Lieferanten **Aski**, **Bröt** und **Climek** bezogen werden.

Als Variablen sollen die Mengen an Brötchen von den jeweiligen Lieferantengesetzt werden:

Liefermenge von Lieferant Aski:  $x$                       Liefermenge von Lieferant Bröt:  $y$

Liefermenge von Lieferant Climek:  $z$

- ⇒ I Pro Tag werden **höchstens 900 Brötchen** benötigt.
- ⇒ II Die **Transportkosten je Brötchen** betragen für die Abholung bei Lieferant **Aski 2 Cent**, bei **Bröt 3 Cent** und bei **Climek 4 Cent**.  
Die **Transportkosten sollen insgesamt höchstens 28 Euro** pro Tag betragen.
- ⇒ III Außerdem sollen von Lieferant **Bröt höchstens 300 Brötchen** pro Tag bezogen werden.

Beim Verkauf ergibt sich **je Brötchen ein Gewinn von 10 Cent**, falls es von **Aski** stammt, **12 Cent**, falls es von **Bröt** stammt, und **15 Cent**, falls es von **Climek** stammt.

Der Gewinn soll maximal sein.

2.7 Ermitteln Sie mithilfe des Simplex-Algorithmus die täglichen Bestellmengen bei den drei Lieferanten. Geben Sie den maximalen Gewinn an.

2.7.1 Nutzen Sie zur Lösung/Berechnung den Aufbau des gegebenen Tableaus.

Führen Sie die notwendigen Umformungen durch, um auf **Tableau 1** zu gelangen.

[12]

	x	y	z	$u_1$	$u_2$	$u_3$	b	Umformung
I								
II								
III								
ZF								
I								
II								
III								
ZF								
I								
II								
III								
ZF								

2.7.2 Nach einigen Umformungsschritten mittels Simplexalgorithmus gelangen Sie (hoffentlich) auf folgendes **Tableau 1**:

	x	y	z	u <sub>1</sub>	u <sub>2</sub>	u <sub>3</sub>	b	Umformung
I	0,5	0,25	0	1	-0,25	0	200	
II	0,5	0,75	1	0	0,25	0	700	
III	0	1	0	0	0	1	300	
ZF	2,5	0,75	0	0	-3,25	0	G-10.500	

2.7.2.1 Woran erkennt man bei Tableau 1, dass noch weiter gerechnet werden muss?

[2]

2.7.2.2 Wie würde die aktuelle Lösung gemäß Tableau 1 lauten und welcher Gewinn würde erzielt?

[6]

2.7.2.3 Erstellen Sie nun ausgehend von **Tableau 1** das Endtableau, geben Sie die vollständige Lösung an und begründen Sie, warum nun ein Maximum vorliegen muss.

[10]

	x	y	z	u <sub>1</sub>	u <sub>2</sub>	u <sub>3</sub>	b	Umformung
I	0,5	0,25	0	1	-0,25	0	200	
II	0,5	0,75	1	0	0,25	0	700	
III	0	1	0	0	0	1	300	
ZF	2,5	0,75	0	0	-3,25	0	G-10.500	
I								
II								
III								
ZF								
I								
II								
III								
ZF								

**Themenbereich 3: Stochastik**

An den Kundenschalter einer Elektronik-Fachmarktkette kommen Kunden, die Probleme mit ihrem Smartphone haben. Die Kundenberater am Schalter wissen aufgrund ihrer Erfahrung, dass diese Reklamationen auf folgenden, typischen Problemen mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten beruhen und unabhängig voneinander auftreten:

Problem	Screenfehler	Defekter Akku	Betriebssystemfehler	Sonstiger Fehler
Wahrheit	4 %	5 %	8 %	x
Zusatzkosten	200,00	400,00	y	300,00

Von diesen vier Problemen tritt pro Reklamation genau eines auf.

Die Funktionsfähigkeit soll nun optimiert werden – insgesamt soll die Fehlerfreiheit für das Gesamtgerät bei ca. 80 % liegen und die Zusatzkosten sollten mit höchstens 60,00 € pro Smartphone kalkuliert werden können.

3.1 Prüfen Sie am Sachverhalt, ob die Fehlerfreiheit für  $x < 5\%$  hier realisierbar ist.

[6]

3.2 Welche Zusatzkosten müsste man bei Betriebssystemfehlern in Kauf nehmen, wenn der Wert für  $x = 4\%$  wäre?

[6]

Die Kundenberater können nur dann vor Ort helfen, falls es sich um einen Bedienungsfehler handelt, der aus Erfahrung bei ca. 30 % vorliegt. Bei anderen Problemen muss das Smartphone zur Reparatur geschickt werden.

3.3 An einem Morgen waren schon vier Kunden mit Smartphone-Reklamationen am Kundenschalter. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

3.3.1 Die Kundenberater konnten allen vier Kunden vor Ort helfen.

[7]

3.3.2 Ein Bedienungsfehler lag bei genau einem Smartphone vor.

[7]

3.3.3 Wie viele Kunden müssen mindestens einen Fehler reklamiert haben, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 99,9 % mind. ein Bedienungsfehler darunter war?

[8]

An den Kundenschalter kommen auch Kunden, die Probleme mit ihrem Tablet haben.

Die Tablets wurden mit Prozessoren von zwei Herstellern ausgerüstet. Von den Prozessoren von Glub wurden 8 % reklamiert, von denen von Hersteller Wexel betrug die Reklamationsquote 5 %. Insgesamt wurden am Kundenschalter 6,8 % der Tablets wegen des Prozessors angemahnt.

3.4 Bestimmen Sie den Anteil der Tablets, die mit einem Prozessor von Glub ausgestattet waren. Dokumentieren Sie das Vorgehen **auch graphisch mittels Baumdiagramm**.

[10]

Die neue Tablet-Serie wird nun komplett mit Displays von SunFlex geliefert – da diese eine besondere Helligkeit versprechen.

**Anmerkung:** *Wie hell sollte das Display sein?*

**Den letzten entscheidenden Faktor des integrierten Displays bei einem Tablet, stellt die maximal mögliche Bildschirmhelligkeit dar. Diese ist angegeben in Candela pro Quadratmeter ( $\text{cd}/\text{m}^2$ ). Je heller ein Gerät sein kann, desto mehr Akku verbraucht es zwar, aber erst auf einem hellen Display sind Inhalte unter der Mittagssonne erkennbar. Daher sollte die Mindesthelligkeit  $400 \text{ cd}/\text{m}^2$  betragen, ansonsten ist das Display, wie unsere Tests zeigten, im Sonnenschein nur schwer ablesbar.**

SunFlex garantiert uns einen Helligkeitswert  $\mu = 400$  und einer Standardabweichung von  $\sigma = 15$ .

3.5 **Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit** für einen Helligkeitswert von mind. 420 und stellen Sie das Ergebnis **graphisch (Skizze)** dar.

[10]

Knut Knödelbach möchte einen Helligkeitswert auf seinem Tablet von mind. 375 haben, da er sonst um die Leistungsfähigkeit seines Akkus besorgt ist.

SunFlex garantiert dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 %.

3.6 Prüfen Sie, ob der Kundenwunsch mit der Zusage des Herstellers zu vereinbaren ist. Dokumentieren Sie dies ebenso **mittels Skizze**.

[10]

SunFlex stellt uns aufgrund von Weiterentwicklungen sein neues Display vor und garantiert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % einen Helligkeitswert von mind. 420 mit  $\sigma = 8$ .

3.7 Welcher Erwartungswert liegt der Helligkeit hier zugrunde?

[8]

Eine Stichprobe hat ergeben, dass 915 von 1.000 Displaytests einen Mindesthelligkeitswert von 420 Einheiten besaßen.

3.8 Geben Sie einen Schätzwert für  $p$  an und prüfen Sie, ob der o.a. Wahrscheinlichkeitswert von 95 % seitens SunFlex zum Konfidenzniveau von 99 % bestätigt werden kann.

[8]

## Anlage I: Tabelle zur Normalverteilung

## Tabelle der Normalverteilung

Tabelle des Integrals  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ . Beispiel:  $\Phi(1.23) = 0.8907$ .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.60	.9452	.9463	.9474	.9485	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.00	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.20	.9861	.9865	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9980	.9980	.9981
2.90	.9981	.9982	.9983	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986



## Anlage II: Sigma-Regeln

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße/-variable  $X$  mit den Parametern  $n$  und  $p$ ,

dem Erwartungswert  $\mu(X) = n \cdot p$

und der Standardabweichung  $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$  mit der Bedingung  $\sigma(X) > 3$

erhält man folgende Näherungen:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \stackrel{\text{symmetrisch}}{=} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(|X - \mu| \leq \sigma) = 0,683$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \stackrel{\text{symmetrisch}}{=} P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(|X - \mu| \leq 2\sigma) = 0,954$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \stackrel{\text{symmetrisch}}{=} P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(|X - \mu| \leq 3\sigma) = 0,997$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \stackrel{\text{symmetrisch}}{=} P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) = P(|X - \mu| \leq 1,64\sigma) = 0,90$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \stackrel{\text{symmetrisch}}{=} P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) = P(|X - \mu| \leq 1,96\sigma) = 0,95$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \stackrel{\text{symmetrisch}}{=} P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) = P(|X - \mu| \leq 2,58\sigma) = 0,99$$

Bezogen auf die Standardnormalverteilung:

→ Sigma-Intervall für 95%-Umgebung:  $\pm 1,96\sigma$  [Tabelle: 0,975]

→ Sigma-Intervall für 90%-Umgebung:  $\pm 1,64\sigma$  [Tabelle: 0,95]

→ Sigma-Intervall für 99%-Umgebung:  $\pm 2,58\sigma$  [Tabelle: 0,995]

## Anlage III: Ergänzungen zur Formelsammlung

$$\text{Konfidenzintervall: } X = n \cdot p \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \rightarrow (n \cdot p - X)^2 = z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot n \cdot p \cdot (1-p)$$

$$\text{Konfidenzintervall (Abschätzung): } \rightarrow p = p_S \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_S \cdot (1-p_S)}{n}}$$

$$\text{Mindestumfang einer Stichprobe: } n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{d^2} \cdot p_S \cdot (1-p_S) \xrightarrow[p \text{ unbekannt}]{p(\max) = \frac{1}{2}} n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{4d^2}$$

mit  $d = |h - p|$  bzw. zugelassener Abweichung

**Themenbereich 4: Lineare Algebra II**

Drei Energieversorger A, B und C konkurrieren in einer Gemeinde um 4.000 Haushalte. Werbeaktionen veranlassen am Jahresende viele Verbraucher, den Energieversorger zu wechseln.

**Von** A wechseln 10 % zu B und 40 % zu C; **von** B wechseln 20 % zu A und 10 % zu C und **von** C wechseln 10 % zu A und 50 % zu B. Die übrigen bleiben bei ihrem Versorger.

Im Jahr 2021 sind 3.200 Haushalte bei A und bei B haben 15 % ihre Verträge, die übrigen sind bei C.

- 4.1 Geben Sie die Übergangsmatrix und den Verteilungsvektor 2021 in absoluten und dezimalen Anteilswerten an. [6]
- 4.2 Berechnen Sie, wie viele Haushalte von den einzelnen Energieversorgern im Jahr 2022 beliefert werden. [6]
- 4.3 Begründen Sie, dass auf der Basis dieser Daten leider nicht die Verteilung von 2020 berechnet werden kann. [6]

Der Energieversorger B überlegt sich, den Standort auszubauen – das würde sich aber nur lohnen, wenn bei gleichbleibendem Wechselverhalten langfristig mehr als 45 % der Haushalte unter Vertrag hätte.

- 4.4 Prüfen Sie die langfristige Entwicklung und geben Sie eine Entscheidungshilfe [8]

In der Nachbargemeinde sind ebenfalls die Anbieter A und B sowie ein weiterer Anbieter D am Markt. Das Wechselverhalten der Haushalte wird mit folgender Tabelle beschrieben:

von nach	A	B	D
A	0,3	0,2	u
B	0,5	0,6	v
D	0,2	0,2	w

**Angenommen, u hat den Wert 0,1.**

- 4.5 Welche Werte für v und w sind dann möglich? [6]
- 4.6 Bestimmen Sie u, v und w, sodass sich die Anteile der Haushalte bei den Anbietern A, B und D von einem Jahr zum anderen nicht ändern, wobei sich die Anteile von A, B und D wie 1 : 3 : 1 verhalten. [8]

Die drei Energieversorger haben sich zum Unternehmen Energy-Mix GmbH zusammengeschlossen und sind nach dem sogenannten Leontief-Modell miteinander verflochten. Die zugrundeliegende Technologiematrix hat folgendes Aussehen:

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0,01 & 0,02 \\ 0,02 & 0,05 & 0,09 \\ 0,2 & 0,4 & 0,01 \cdot t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in [0; 100]$$

Die Lieferungen untereinander, der Konsum sowie die Produktion werden in Geldeinheiten (GE) angegeben.

- 4.7 Für das erste Quartal des Jahres liegt folgende unvollständige Verflechtungstabelle vor: [10]

	Sektor A	Sektor B	Sektor C	Markt	Produktion
Sektor A	0	55	260	a	5 000
Sektor B	100	275	1 170	3 955	b
Sektor C	c	d	780	9 020	13 000

Bestimmen Sie a, b, c und d sowie den Wert des Parameters t für diese Situation.

- 4.8 Für das zweite Quartal gilt  $t = 5$ . Der Wert der Konsumabgabe beträgt für Sektor A 1.777 GE, für Sektor B 1.245 GE und für Sektor C 8.180 GE. [8]  
Wie hoch muss der Wert der Produktion jedes Sektors sein, um dieser Nachfrage gerecht zu werden?  
Wie hoch ist dabei der Wert des Eigenverbrauchs von Sektor C?

- 4.9 Untersuchen Sie, für welchen Wert von t keine Inverse zur Technologiematrix existiert. [6]

- 4.10 Aufgrund der Ergebnisse in Auftrag gegebener Marktprognosen entwickelt sich der Marktbedarf der Produkte von A, B und C in den **kommenden Monaten** unterschiedlich, so dass auf der Basis folgender Gesamtproduktion kalkuliert wird.

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} -k + 40 \\ 100 - 20 \cdot e^{-2k} \\ 100 \end{pmatrix} \text{ mit } k = [0; 12]$$

Dabei soll k für einen Zeitpunkt innerhalb des Betrachtungszeitraums stehen.

- 4.10.1 Beschreiben Sie die Entwicklung der Gesamtproduktion für A, B und C in den kommenden 12 Monaten. [6]

- 4.10.2 Zeigen Sie, dass die möglichen Abgaben an den Markt mit  $\mathbf{T(0)}$  folgende Darstellung annehmen kann: [10]

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0,2e^{-2k} - k + 37 \\ -19e^{-2k} + 85,2 + 0,02k \\ 8e^{-2k} + 52 + 0,2k \end{pmatrix}$$

und ermitteln Sie den Zeitpunkt, in dem das **Maximum der Summe der Marktabgaben** erreicht wird.

Beachten Sie bitte, dass k als Intervall gegeben ist.