

Thema: e-Funktionen (Differential- & Integralrechnung)  
Mit und ohne Scharparameter

Name:

Punkte:

Note:

**Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!**

**Aufgabe 1: Tangente**

8

Gegeben sei die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f_a(x)$  mit  $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$  mit  $a > 0$

a) Zeigen Sie, dass gilt:  $f_a'(0) = -a$

Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von  $f_a(x)$  im Punkt  $P(0 \mid f_a(0))$

b) Bestimmen Sie die Tangenten- und Normalengleichung.

**Aufgabe 2: Kurvenuntersuchung (innermathematisch)**

32

Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f(x)$  mit  $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen ohne das zugrundeliegende Koordinatensystem:

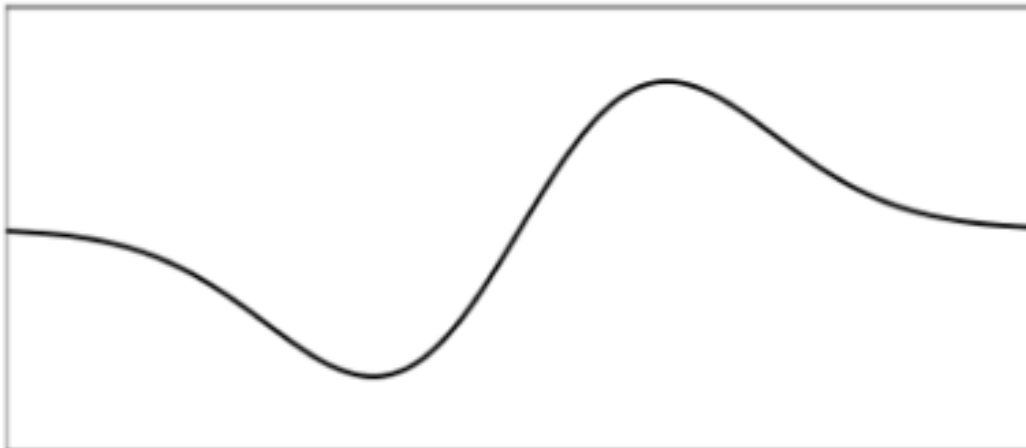


Abb. 1

- Zeigen Sie, dass die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist und zeichnen Sie das Koordinatensystem so ein, dass die Punktsymmetrie erkennbar wird.
- Bestimmen Sie den Grenzwert von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$ .
- Ermitteln Sie die Extremwertstellen der Funktion (notwendige Bedingung genügt.)
- Zeigen Sie mittels Integralrechnung, dass eine Stammfunktion zur Funktion  $f(x)$  folgende Form annehmen kann:

$$\int f(x) dx = \int x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} dx = c - e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2}$$

- e) Erklären Sie, dass die Fläche unter der Randfunktion von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  den endlichen Flächenwert  $A = \sqrt{e}$  besitzt.
- f) Deuten Sie die Aussage:  $F(c) - F(-c) = 0$  mit  $c > 0$  in Bezug auf den Graphen der Funktion  $f(x)$  geometrisch.

20	
----	--

**Aufgabe 3: Kurvenuntersuchung mit Scharparameter**

Gegeben sei die Funktion  $f_k(x) = (1 - kx^2) \cdot e^{-x}$  mit  $k > 0$

- a) Geben Sie die Nullstellen in Abhängigkeit von  $k$  an.
- b) Für einen bestimmten Wert von  $k$  besitzt der Graph der Funktion  $G_f$  zwei Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse, die den Abstand 4 voneinander haben. Berechnen Sie diesen Wert.  
Anmerkung: berücksichtigen Sie das Symmetrieverhalten.
- c) Begründen Sie, dass die Funktion  $f(x)$  in jedem Fall zwei Extremwertstellen besitzt.
- d) Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu  $f_k(x)$ .

5	
---	--

**Zusatzaufgabe:**

Wie lautet die Stammfunktion zu folgende Funktion:  $g : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$