13. Jgst.	7. Test	Datum: 28.03.2023
Kurs M LK	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **ln-Funktionen (Differential- & Integralrechnung)**
Mit und ohne Scharparmeter

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

Kurvenuntersuchung (innermathematisch)

Gegeben sei die Schar von Funktionen f_k durch die Gleichung

$$f_k(x) = (x-k)\cdot\ln(x) \quad mit\ k>0$$

(1) Begründen Sie kurz, warum der Definitionsbereich wie folgt festgelegt wird: **4**

$$D =]0;\infty]$$

(2) Untersuchen Sie das Verhalten der Graphen der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs. **6**

(3) Wo liegen die Nullstellen der Kurvenschar? **6**

(4) Zeigen Sie, dass die 1. Ableitung der Funktion folgende Form annehmen kann: **4**

$$f_k'(x) = \ln(x) + \frac{x-k}{x}$$

(5) Bestimmen Sie eine Gleichung des geometrischen Ortes aller Tiefpunkte, ohne dabei die x-Werte der Minima zu bestimmen. **6**

(6) Prüfen Sie, ob die Kurvenscharen Wendepunkte besitzen. **6**

(7) Wie lauten die Tangente und die Normale an der Stelle x = 2 bei $f_2(x)$? **8**

(8) Zeigen Sie mittels Integralrechnung, dass die Stammfunktion zu $f_k(x)$ folgende Form annehmen kann: **6**

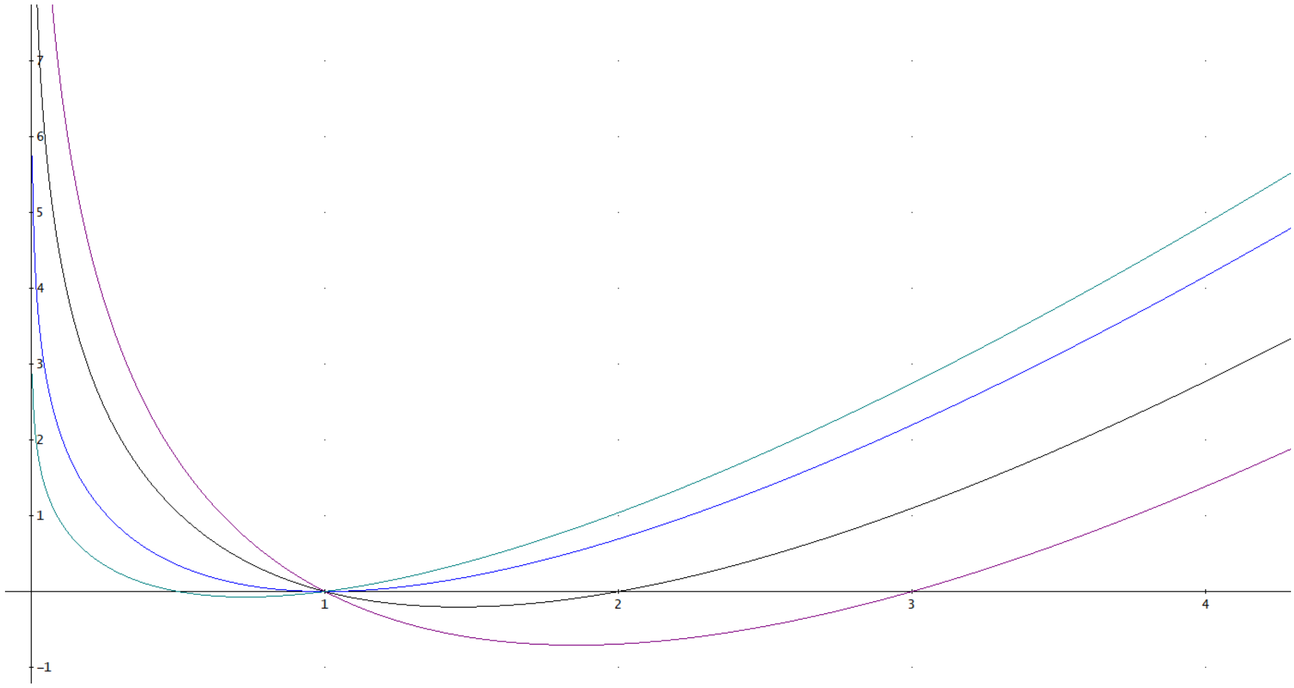
$$F_k(x) = \ln(x)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - kx\right) - \frac{1}{4}x^2 + kx \quad mit\ k>0$$

(9) Berechnen Sie die Flächenmaßzahl für folgendes Integral: $\int_1^e F_3(x)\,dx$. **6**

(10) Beschreiben Sie die notwendige Vorgehensweise für die Ermittlung der Flächenmaßzahl bei $\int_1^e F_2(x)\,dx$ und berechnen Sie die Fläche. **6**

(11) Für welche Werte von k sind die Kurven gezeichnet worden?

6	



Bitte begründen Sie Ihre k-Werte.

Die Funktion $G(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt$

(12) Geben Sie G(x) in integralfreier Form an.

6	

Zusatzaufgabe:
Bestimmen Sie die Extrema von G(x) –
allerdings ohne die Ableitung explizit zu bilden, sondern mittels geschickter Argumentation.

6	

Lösungen:

$$f_k(x) \;=\; (x-k)\cdot\ln(x) \quad mit\ k>0$$

(1) Begründen Sie kurz, warum der Definitionsbereich wie folgt festgelegt wird:

$$D \;=\;]0;\infty]$$

$$f_k(x) \;=\; (x-k)\cdot\ln(x) \quad mit\ k>0$$

$$\rightarrow \quad für\ \ln(x)\ gilt: \quad x>0 \quad und \quad x\rightarrow\infty\ möglich$$

(2) Untersuchen Sie das Verhalten der Graphen der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs.

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) \;=\; \lim_{x\to\infty}(x-k)\cdot\ln(x) \;\rightarrow\; "\infty"\cdot"\infty" \;\rightarrow\; \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f_k(x) \;=\; \lim_{x\to 0^+}(x-k)\cdot\ln(x) \;\rightarrow\; "-k"\cdot"-\infty" \;\rightarrow\; \infty$$

(3) Wo liegen die Nullstellen der Kurvenschar?

$$f_k(x) \;=\; (x-k)\cdot\ln(x) \;=\; 0 \;\xrightarrow[Nullprodukt]{Satz\ vom}\; x-k=0 \quad und \quad \ln(x)=0$$

$$x=k \quad und \quad x=e^0=1 \;\rightarrow\; 2\ Nullstellen\ \forall k>0\wedge k\neq 1$$

$$Sonderfall: k=1 \;\rightarrow\; 1\ Nullstelle$$

(4) Zeigen Sie, dass die 1. Ableitung der Funktion folgende Form annehmen kann:

$$f_k'(x) \;=\; \ln(x)+\frac{x-k}{x}$$

$$f_k'(x) \;=\; 1\cdot\ln(x)+(x-k)\cdot\frac{1}{x} \;=\; \ln(x)+\frac{x-k}{x}$$

(5) Bestimmen Sie eine Gleichung des geometrischen Ortes aller Tiefpunkte, ohne dabei die x-Werte der Minima zu bestimmen.

$$f_k'(x) \;=\; \ln(x)+\frac{x-k}{x} \;=\; 0 \;\xrightarrow[nach\ k]{auflösen}\; k \;=\; x\ln(x)+x$$

$$\xrightarrow[in\ f_k(x)]{einsetzen}\; y \;=\; (x-k)\cdot\ln(x) \;=\; \{x-[x\ln(x)+x]\}\cdot\ln(x)$$

$$\rightarrow\; y \;=\; -x[\ln(x)]^2$$

(6) Prüfen Sie, ob die Kurvenscharen Wendepunkte besitzen.

$$f_k{}'(x) = \ln(x) + \frac{x-k}{x} = \ln(x) + 1 - \frac{k}{x}$$

$$f_k{}''(x) = \frac{1}{x} + \frac{k}{x^2} = 0 \xrightarrow{\cdot x^2} x + k = 0 \rightarrow x = -k$$

$$\rightarrow \textit{Widerspruch zur Definitionsmenge}$$

(7) Wie lauten die Tangente und die Normale an der Stelle x = 2 bei $f_2(x)$?

$$f_2{}'(x) = \ln(x) + \frac{x-2}{x} \quad und \quad f_2(x) = (x-2)\cdot\ln(x)$$

$$f_2{}'(2) = \ln(2) + \frac{2-2}{2} = \ln(2) = m \quad und \quad f_2(2) = (2-2)\cdot\ln(2) = 0$$

$$y-\textit{Achsenabschnitt der Tangente}: \quad 0 = 2\cdot\ln(2) + b \quad \rightarrow \quad b = -\ln(4)$$

$$\textit{Tangente}: \quad t(x) = \ln(2)\cdot x - \ln(4)$$

$$\textit{Normale}: \quad -\frac{1}{\ln(2)} = m_{Normale}$$

$$y-\textit{Achsenabschnitt der Normalen}: \quad 0 = 2\cdot\left[-\frac{1}{\ln(2)}\right] + c \quad \rightarrow \quad c = \frac{2}{\ln(2)}$$

$$\textit{Normale}: \quad n(x) = -\frac{1}{\ln(2)}\cdot x + \frac{2}{\ln(2)}$$

(8) Zeigen Sie mittels Integralrechnung, dass die Stammfunktion zu $f_k(x)$ folgende Form annehmen kann:

$$F_k(x) = \ln(x)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - kx\right) - \frac{1}{4}x^2 + kx \quad mit\ k > 0$$

$$f_k(x) = (x-k)\cdot\ln(x) \quad mit\ k > 0$$

VZ	D	I	$\mathrm{Pr}odukt$
$+$	$\ln(x)$	$x-k$	$(x-k)\cdot\ln(x)$
$-$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}x^2 - kx$	$\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - kx\right) = \left(\frac{1}{2}x - k\right)$

$$\int (x-k)\cdot\ln(x)dx = \ln(x)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - kx\right) - \int\left(\frac{1}{2}x - k\right)dx = \ln(x)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - kx\right) - \frac{1}{4}x^2 + kx$$

(9) Berechnen Sie die Flächenmaßzahl für folgendes Integral: $\int_1^e F_3(x)\,dx$.

$$F_3(x) = \left[\ln(x)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)-\frac{1}{4}x^2+3x\right]_1^e$$

$$= \left[\ln(e)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e^2-3\cdot e\right)-\frac{1}{4}e^2+3\cdot e\right]-\left[\ln(1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2-3\cdot 1\right)-\frac{1}{4}\cdot 1^2+3\cdot 1\right]$$

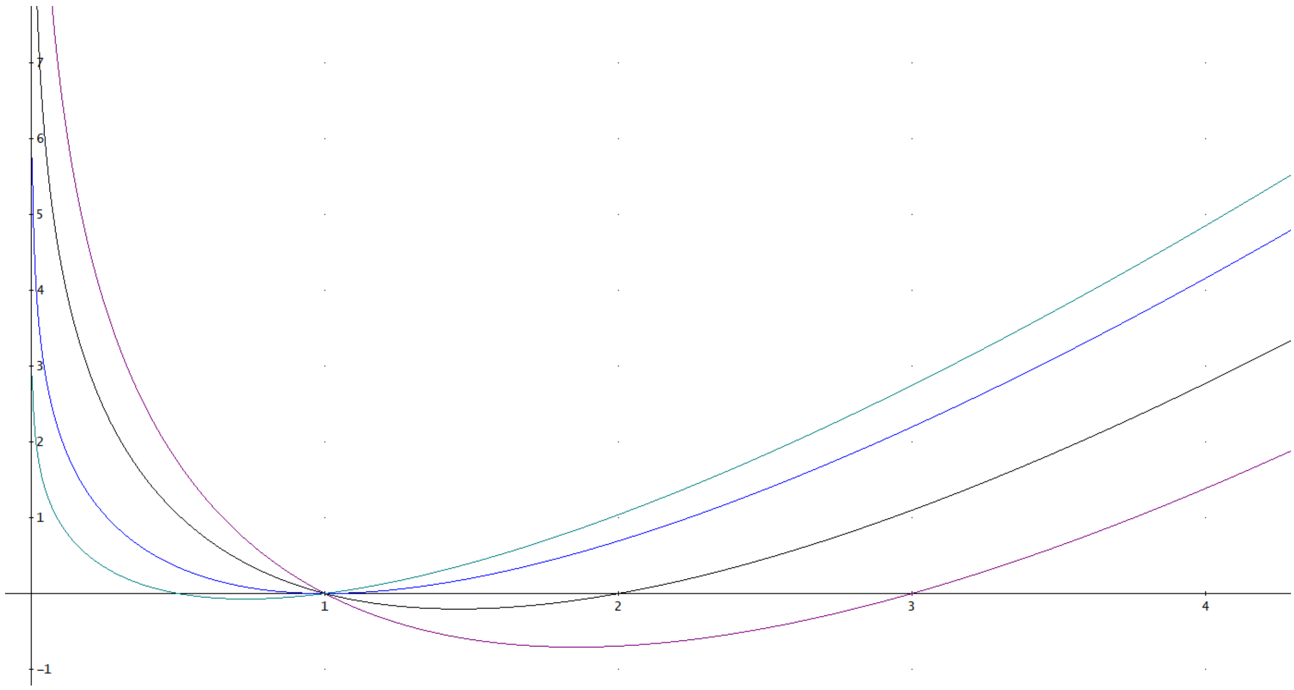
$$= \frac{1}{4}\cdot e^2-2{,}75 \approx -0{,}9027 \rightarrow \textit{Fläche}:\ 0{,}9027$$

Da die Nullstellen bei x = 1 und x = 3 liegen, ist die Fläche komplett unterhalb der x-Achse.

(10) Beschreiben Sie die notwendige Vorgehensweise für die Ermittlung der Flächenmaßzahl bei $\int_1^e F_2(x)\,dx$ und berechnen Sie die Fläche.

Da die Nullstelle x = 2 innerhalb des Integrationsintervalls liegt, muss das Intergral in zwei Teilintergrale mit den Grenzen [1 ; 2] und [2 ; e] aufgeteilt werden;
Dann werden beide Teilflächen bestimmt, wobei die erste Teilfläche negativ ist (unterhalb der x-Achse) und daher im Betrag geschrieben werden muss.
Danach werden beide Teilflächen addiert.

(11) Für welche Werte von k sind die Kurven gezeichnet worden?



Bitte begründen Sie Ihre k-Werte.

k = 0,5 ; 1; 2 ; 3 **Begründung: Nullstellen**

Die Funktion $G(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt$

(12) Geben Sie G(x) in integralfreier Form an.

$$G(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt = \left[\ln(t)\cdot\left(\frac{1}{2}t^2 - t\right) - \frac{1}{4}t^2 + t\right]_1^x$$

$$= \left[\ln(x)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) - \frac{1}{4}x^2 + x\right] - \left[\ln(1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 - 1\right) - \frac{1}{4}\cdot 1^2 + 1\right]$$

$$= \ln(x)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) - \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{3}{4}$$

Zusatzaufgabe:
Bestimmen Sie die Extrema von G(x) –
allerdings ohne die Ableitung explizit zu bilden, sondern mittels
geschickter Argumentation.

$$G(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt \xrightarrow{Ableitung} G'(x) = f_1(x) = (x-1)\cdot\ln(x)$$

$$Extrema: \quad Nullstelle\ von\ f_1(x) \quad \rightarrow \quad x = 1\,[doppelt] \quad \rightarrow \quad keine\ Extrema$$