# WTR – Aufgabe

**(40 Bewertungseinheiten)**

BE

Die Abbildung 1 zeigt schematisch die achsensymmetrische Seitenansicht einer Hängebrücke. Die beiden vertikalen Pfeiler haben einen Abstand von 400 m. Die Wasseroberfläche liegt 20 m unterhalb der Fahrbahn.

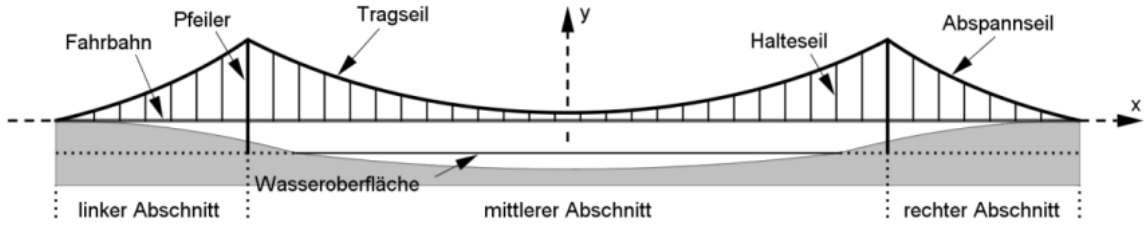



Abb. 1

Die beiden Pfeiler gliedern die Brücke in einen linken, einen mittleren und einen rechten Abschnitt. Am oberen Ende jedes Pfeilers ist sowohl das Tragseil des mittleren Abschnitts als auch das Abspannseil des linken bzw. rechten Abschnitts befestigt. Die beiden Abspannseile sind am jeweiligen Ende der Fahrbahn verankert.
Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 10 m in der Realität. In der Seitenansicht der Brücke verläuft die x-Achse entlang der horizontal verlaufenden Fahrbahn, die y-Achse entlang der Symmetrieachse.

| | | | BE |
|---|---|---|---|
| **1** | Im rechten Abschnitt der Brücke wird der Verlauf des Abspannseils modellhaft durch den Funktionsterm $r(x) = \frac{253}{100} \cdot \left(e^{\frac{1}{11}\cdot(32-x)} - 1\right)$ beschrieben. | | |
| | **a** | Zeigen Sie, dass die Fahrbahn der Brücke insgesamt 640 m lang ist. | 4 |
| | **b** | Auch im linken Abschnitt der Brücke kann der Verlauf des Abspannseils im Modell durch einen Funktionsterm beschrieben werden. Geben Sie einen passenden Term $\ell(x)$ sowie das Intervall an, in dem dieser Term das Abspannseil darstellt. | 3 |
| | **c** | Berechnen Sie die Höhe der Pfeiler über der Wasseroberfläche. | 3 |
| | **d** | Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem das rechte Abspannseil auf den zugehörigen Pfeiler trifft. | 5 |
| | **e** | In der Seitenansicht begrenzen der rechte Pfeiler, das zugehörige Abspannseil und die Fahrbahn ein Flächenstück. Berechnen Sie dessen Inhalt in der Realität. | 5 |

| | | | BE |
|---|---|---|---|
| 1 | a | $r(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{11}\cdot(32-x)=0 \Leftrightarrow x=32$<br>$2\cdot 32\cdot 10\text{m}=640\text{m}$ | 4 |
| | b | $\ell(x)=r(-x)$, $[-32;-20]$ | 3 |
| | c | $r(20)\cdot 10\text{m}+20\text{m}\approx 70\text{m}$ | 3 |
| | d | $r'(x)=-\frac{23}{100}\cdot e^{\frac{1}{11}\cdot(32-x)}$<br>$\tan\alpha=r'(20)$ liefert für die gesuchte Winkelgröße $90°+\alpha\approx 56°$. | 5 |
| | e | $\int_{20}^{32} r(x)dx=\frac{253}{100}\cdot\left[-11\cdot e^{\frac{1}{11}\cdot(32-x)}-x\right]_{20}^{32}\approx 25$<br>Der Flächeninhalt beträgt etwa $2500\,\text{m}^2$. | 5 |

d) **Option 1: Steigung über tan => Ableitung von r(x)**

$$r1(x) := -\frac{23\cdot e^{32/11 - x/11}}{100}$$

r1(20)

−0.6847052131

TAN(α) = −0.6847052131

α = −34.411

m(α) := α + 90

m(α) = 56

**Option 2: Berechnung mittels Steigungsdreieck**

$$P(20\mid 5) \quad \textit{und} \quad Q(32\mid 0)$$

$$\Delta x=12 \quad \textit{und} \quad \Delta y=-5 \;\rightarrow\; \Delta z \overset{\textit{Pythagoras}}{=} 13$$

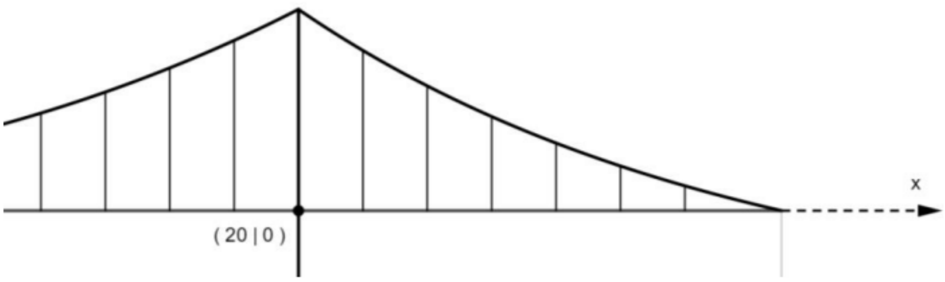
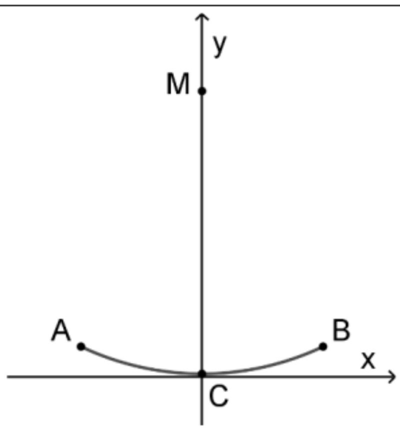
$$\sin(\alpha)=\frac{12}{13} \;\rightarrow\; \alpha\approx 67{,}38 \quad \textit{oder} \quad \tan(\alpha)=\left|\frac{12}{-5}\right| \;\rightarrow\; \alpha\approx 67{,}38$$

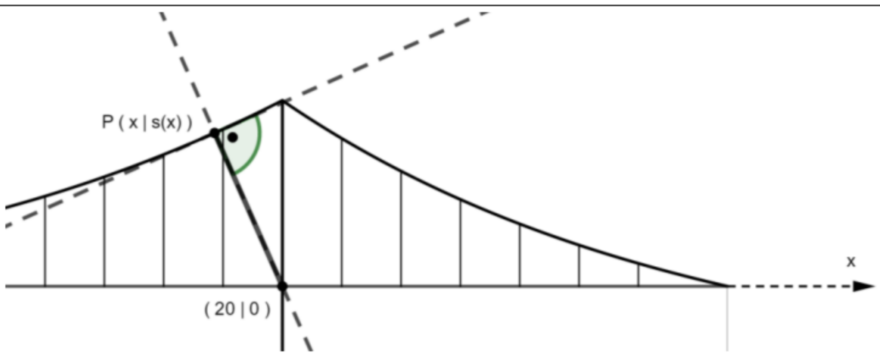
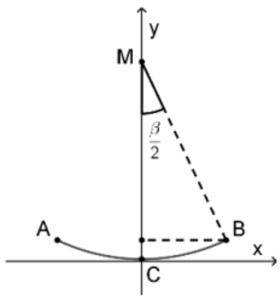
e) Genauer Integralwert:

$$\int \frac{253}{100}\cdot\left(e^{1/11\cdot(32-x)}-1\right)dx \qquad -\frac{2783\cdot e^{32/11 - x/11}}{100}-\frac{253\cdot x}{100}$$

$$\int_{20}^{32} \frac{253}{100}\cdot\left(e^{1/11\cdot(32-x)}-1\right)dx \qquad 24.65933078$$

| | | |
|---|---|---|
| **2** | Im Folgenden wird der mittlere Abschnitt der Brücke betrachtet. Die vertikal verlaufenden Halteseile verbinden die Fahrbahn mit dem Tragseil. Sie haben sowohl von den Pfeilern als auch untereinander einen horizontalen Abstand von 16 m.<br>Der Verlauf des Tragseils wird modellhaft durch den Funktionsterm<br>$s(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^6\cdot\left(x^4+2560x^2\right)+\frac{125}{256}$ beschrieben. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **a** | Begründen Sie, dass der Term von s damit in Einklang steht, dass die Seitenansicht der Brücke achsensymmetrisch ist. | 2 |
| | **b** | Zwei Punkte des Tragseils in der rechten Hälfte des mittleren Abschnitts haben einen horizontalen Abstand von 40 m und einen Höhenunterschied von 5 m. Geben Sie eine Gleichung an, deren Lösung die x-Koordinate des höher liegenden Punkts im Modell ist. | 2 |
| | **c** | Geben Sie die Bedeutung des Terms<br>$\left[s(-20+1{,}6\cdot1)+s(-20+1{,}6\cdot2)+\ldots+s(-20+1{,}6\cdot23)+s(-20+1{,}6\cdot24)\right]\cdot10$<br>im Sachzusammenhang an und begründen Sie Ihre Angabe. | 5 |
| | **d** | Die Lösung der Gleichung $\frac{s(x)-0}{x-20}\cdot s'(x)=-1$ ermöglicht die Berechnung eines Abstands im Sachzusammenhang. Geben Sie an, um welchen Abstand es sich handelt, und begründen Sie Ihre Aussage.<br>Veranschaulichen Sie diesen Abstand in Abbildung 2.<br><br><br>Abb. 2 | 6 |
| | **e** | Der Verlauf des Tragseils kann in einem alternativen Modell näherungsweise durch einen Kreisbogen beschrieben werden. Dazu dient der Kreis mit dem Mittelpunkt $M\left(0\,\middle|\,\frac{1699}{36}\right)$, der durch die Punkte $A(-20\,\|\,5)$, $B(20\,\|\,5)$ und $C\left(0\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$ verläuft (vgl. Abbildung 3). Berechnen Sie unter Verwendung des Kreisbogens die Länge des Tragseils.<br><br><br>Abb. 3 | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **2** | **a** | Der Funktionsterm ist ganzrational und enthält Potenzen von x ausschließlich mit geradzahligen Exponenten. | 2 |
| | **b** | $s(x)-s(x-4)=0{,}5$ *oder* $s(x+4)-s(x)=0{,}5$ | 2 |
| | **c** | Mit dem Term kann die Gesamtlänge der Halteseile im mittleren Brückenabschnitt berechnet werden.<br>Begründung: Jeder der Summanden $s(-20+1{,}6\cdot k)$ mit $k=1, 2, \ldots, 24$ gibt die Länge eines der 24 Halteseile im Modell an. Der Faktor 10 berücksichtigt den verwendeten Maßstab. | 5 |
| | **d** | Die Lösung der Gleichung ermöglicht die Berechnung des Abstands desjenigen Punkts des rechten Pfeilers zum Tragseil, der auf der Höhe der Fahrbahn liegt.<br>Begründung: Die Lösung der Gleichung ist die x-Koordinate desjenigen Punkts P des Graphen von s, dessen Verbindungsstrecke zum Punkt $(20\,\vert\,0)$ senkrecht zur Tangente an den Graphen von s in P steht. | 6 |
| | |  | |
| | **e** | Mit $\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{20}{\frac{1699}{36}-5}$ ergibt sich für die Länge des Kreisbogens $\frac{\beta}{360°}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{1699}{36}-\frac{1}{2}\right)\approx 41{,}3$.<br>Das Tragseil ist etwa 413 m lang.<br> | 5 |
| | | | 40 |

Alternative: **Länge des Kreisbogens mit sinus**

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\textit{Gegenkathede}}{\textit{Hypotenuse}} \rightarrow \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{20}{\frac{1699}{36}-\frac{1}{2}}=\frac{20}{\frac{1699}{36}-\frac{18}{36}}=\frac{20\cdot 36}{1681}=0{,}4283$$

$$\xrightarrow{TR} \left[\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{-1}=\frac{\beta}{2}=25{,}36° \xrightarrow{\cdot 2} \beta=50{,}72°$$

$$\frac{b}{2r\pi}=\frac{\beta}{360} \rightarrow b=\frac{\beta\cdot 2r\pi}{360}=\frac{\beta\cdot r\pi}{180} \rightarrow b=\frac{50{,}72\cdot\frac{1681}{36}\cdot\pi}{180}=41{,}335$$

$$\xrightarrow{\textit{Gesamtlänge}} 41{,}335[LE] \xrightarrow{\textit{Maßstab}:1:10} 41{,}335\cdot 10=413{,}35[\mathrm{m}]$$